

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

---

# **Výpočet tlakově odolného uzávěru**

## **Calculation of Pressure-Resistant Closure**

Student:

Jana Sklenářová

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ostrava 2013

# Zadání bakalářské práce

Student:

**Jana Sklenářová**

Studijní program:

B2341 Strojírenství

Studijní obor:

3901R003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Výpočet tlakově odolného uzávěru  
Calculation of Pressure-Resistant Closure

Zásady pro vypracování:

1. Rozpracujte teorii pro daný problém.
2. Proved'te potřebné analytické výpočty.
3. Proved'te numerickou simulaci pomocí metody konečných prvků.
4. Získané výsledky porovnejte.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Lenert, J.: Pružnost a pevnost II, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 1998.
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69, SNTL, Brno, 1989.
- [3] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1, Vydavatelství CVUT, Praha, 1992.
- [4] Lenert, J.: Úvod do metody konečných prvků, VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80 – 7078 – 686 – 8
- [5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method (Volume 1 - 3), Butterworth-Heinemann, Oxford 2000, ISBN 0-7506-5049-4

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Fusek, Ph.D.**

Datum zadání: 14. 12. 2012

Datum odevzdání: 20. 5. 2012



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
*vedoucí katedry*

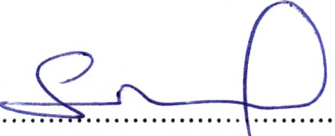


doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
*děkan fakulty*

### Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedla jsem všechny použité podklady a literaturu.

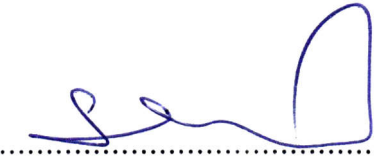
V Ostravě .....11.5.2013.....

  
.....  
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové (bakalářské) práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě : 11.5.2013



.....  
podpis

Jméno a příjmení autora práce: Jana Sklenářová

Adresa trvalého pobytu autora práce: Jana Maluchy 103

70030 Ostrava-Dubina



Ráda bych na tomto místě poděkovala panu Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace a cenné rady, bez čehož by tato práce nevznikla.

## Anotace

SKLENÁŘOVÁ, J. *Výpočet tlakově odolného uzávěru: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2013, 75 s. Vedoucí práce: Fusek, M.

Tato práce se zabývá kontrolou tlakově odolného uzávěru, který existuje v nespecifikovaném podzemním objektu a je navržen pro udržení tlaku 0,83MPa. Pro posouzení bude použito analytické i numerické metody. Bude uvedena potřebná teorie pružnosti a pevnosti pro analytické výpočty. Numerický výpočet bude probíhat pomocí MKP (metody konečných prvků) a to za použití MSC Softwaru Nastran. Výsledky obou metod budou porovnány a zhodnoceny.

## Annotation

SKLENÁŘOVÁ, J. *Calculation of Pressure-Resistant Closure: Bachelor Thesis*. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 2013, 75 p. Thesis head: Fusek, M.

This thesis deals with control of pressure-resistant closure which is located in an underground facility and it is devised to retain pressure 0,83MPa. Analytical and numerical method will be used to assess. Necessary theory of mechanics of materials for analytical calculations will be introduced. Numerical calculation will be realized by FEM (finite element method) using MSC Software Nastran. The results of both of this methods will be evaluated among themselves.

## Seznam použitých zkratek a symbolů

$\varphi (\varphi_1, \varphi_2)$	– úhel zkroucení (pro nosník 1, nosník 2) [deg]
$\varphi_M$	– úhel natočení [deg]
$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$	– Prandtlovy funkce [N/mm]
$\rho_m$	– poloměr zakřivení v meridiánové rovině [mm]
$\rho_t$	– poloměr zakřivení v obvodovém směru [mm]
$\sigma$	– normálové napětí [MPa]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	– normálové napětí pro případ 1, 2, 3 [MPa]
$\sigma_m$	– meridiánové napětí [MPa]
$\sigma_{red}$	– redukované napětí [MPa]
$\sigma_t$	– obvodové napětí [MPa]
$\tau$	– smykové napětí [MPa]
$\tau_1, \tau_2, \tau_3$	– smykové napětí mezi dvěma smykovými čarami [MPa]
$\tau_{max}$	– maximální smykové napětí [MPa]
$\tau_R, \tau_{(R+t/2)}, \tau_{(R-t/2)}$	– smykové napětí v zakřivené části (při poloměru R, R+t/2, R-t/2) [MPa]
$\tau_s, \tau_{s1}, \tau_{s2}, \tau_{s3}$	– smykové napětí pro střednici (mezi smykovými čarami) [MPa]
$\tau_{smax}$	– maximální smykové napětí ve střednici [MPa]
$\vartheta$	– poměrný úhel zkroucení [deg/m]
$a$	– délkový rozměr [mm]
$b$	– délkový rozměr [mm]
$C_2$	– integrační konstanta [N/mm]
$E$	– modul pružnosti v tahu [MPa]
$F$	– síla [N]
$F_m$	– síla od meridiánového napětí [N]
$F_p$	– síla od tlaku [N]
$F_{vodorov.}$	– vodorovná složka reakce membrány [N]

$G$	– modul pružnosti ve smyku [MPa]
$I$	– moment setrvačnosti [mm <sup>4</sup> ]
$I_y, I_{y1}, I_{y2}$	– moment setrvačnosti k ose y (pro průřez 1, průřez 2) [mm <sup>4</sup> ]
$I_{y1-1}, I_{y1-23}, I_{y1-4}$	– dílčí momenty setrvačnosti průřezu 1 [mm <sup>4</sup> ]
$I_{y2-1}, I_{y2-23}$	– dílčí momenty setrvačnosti průřezu 2 [mm <sup>4</sup> ]
$l, l_1, l_2$	– délkový rozměr (náležející nosníku 1, nosníku 2) [mm]
$l_{11}, l_{22}$	– upravené délky (nosníku 1, nosníku 2) [mm]
$M, M_1, M_2$	– (ohybový) moment (pro případ 1, případ 2) [Nmm]
$M(x)$	– (ohybový) moment v závislosti na souřadnici x [Nmm]
$m, m_1, m_2$	– spojitý kroutící moment (pro nosník 1, nosník 2) [N]
$M_A, M_B, M_C, M_D$	– reakce [Nmm]/[Nm]
$m_{Fm/2}$	– spojitý kroutící moment od svislé složky reakce membrány [N]
$m_{Fvodorov.}$	– spojitý kroutící moment od vodorovné složky reakce membrány [N]
$M_k$	– kroutící moment [Nmm]/[Nm]
$m_p$	– spojitý kroutící moment od zatížení tlakem [N]
$M_R$	– kroutící moment vyvolaný reakcí z příčky [Nmm]
$N$	– posouvající síla [N]
$p$	– tlak [MPa]
$q, q_1, q_2$	– spojité zatížení (pro nosník 1, nosník 2) [N/mm]
$q_{Fm/2}$	– spojité zatížení od svislé reakce membrány [N/mm]
$q_{Fvodorov.}$	– spojité zatížení od vodorovné reakce membrány [N/mm]
$q_m$	– spojité zatížení od reakce membrány [N/mm]
$q_p$	– spojité zatížení od tlaku [N/mm]
$Q_t$	– smykový tok [N/mm]
$R$	– reakce [N]
$r(x)$	– obecný poloměr střednice v závislosti na souřadnici x [mm]

$r, R$	– poloměr [mm]
$R_e$	– mez kluzu [MPa]
$R_m$	– mez pevnosti [MPa]
$S$	– plocha [mm <sup>2</sup> ]
$t$	– tloušťka stěny nádoby [mm]
$t, t_1, t_2, t_3$	– tloušťka profilu (v místě 1, místě 2, místě 3) [N]
$v$	– výška membrány [mm]
$V_\Phi$	– objem Prandlova vrchlíku [Nmm]
$w$	– průhyb [mm]
$z$	– vzdálenost vlákna od neutrální osy [mm]
$z_{max}, z_{max1}, z_{max2}$	– maximální vzdálenost vlákna od neutrální osy (pro případ 1, případ 2) [mm]
$z_t$	– souřadnice těžiště [mm]

## Obsah

<b>0</b>	<b>Úvod</b>	<b>12</b>
0.1	Popis zařízení . . . . .	12
<b>1</b>	<b>Problematika rázového zatížení</b>	<b>12</b>
1.1	Chování materiálu při rázovém zatížení . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Výpočtový model pro analytický výpočet</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Teorie pružnosti a pevnosti</b>	<b>18</b>
3.1	Membránová teorie rotačně symetrických tenkostěnných nádob . . . . .	18
3.2	Prostý ohyb . . . . .	21
3.2.1	Moment setrvačnosti . . . . .	23
3.2.2	Vyšetřování vnitřních statických účinků . . . . .	24
3.2.3	Deformace při ohybu podle Castigliana . . . . .	25
3.3	Volné kroucení nekruhových průřezů . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Analytický výpočet</b>	<b>31</b>
4.1	Válcová stěna - membrána . . . . .	31
4.2	Příčka . . . . .	33
4.3	Rám . . . . .	48
4.3.1	Vazby mezi ostatními prvky . . . . .	49
4.3.2	Celkové zatížení . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Numerický výpočet</b>	<b>65</b>
5.1	Okrajové podmínky . . . . .	66
5.2	Zatížení . . . . .	67
5.3	Sít' . . . . .	68
5.4	Kontakty . . . . .	69
5.5	Výsledky . . . . .	72
5.5.1	Posuvy . . . . .	72
5.5.2	Průhyb příčky . . . . .	72



5.5.3	Napětí . . . . .	73
6	Porovnání výsledků z analytických a numerických výpočtů	78
7	Závěr	80
8	Reference	81

## 0 Úvod

Předmětem této bakalářské práce je kontrolní pevnostní výpočet tlakově odolného uzávěru, který uzavírá otvor o světlosti 3000x2500mm v podzemním objektu. Tento uzávěr má udržet tlak o velikosti 0,83MPa. Tlak nastane od výbuchu. Výpočet se bude zabývat pouze křídlem.

Výpočet bude proveden jak analyticky pomocí teorií pružnosti a pevnosti, tak numericky pomocí MSC Softwaru Nastran.

Aby byl výpočet kompletní, je třeba dopočítat pevnost stěny, ve které je uzávěr usazen, zkontrolovat únosnost závěsů a svary. Tato práce se bude zabývat pouze pevností při zatížení uvedeným tlakem a pouze v té oblasti ocelových dveří, která zaplňuje otvor ve stěně. Nebudeme se tedy zabývat závěsy, ani pevností stěny. Svary v tomto případě považujeme za dokonalé spojení dvou součástí.

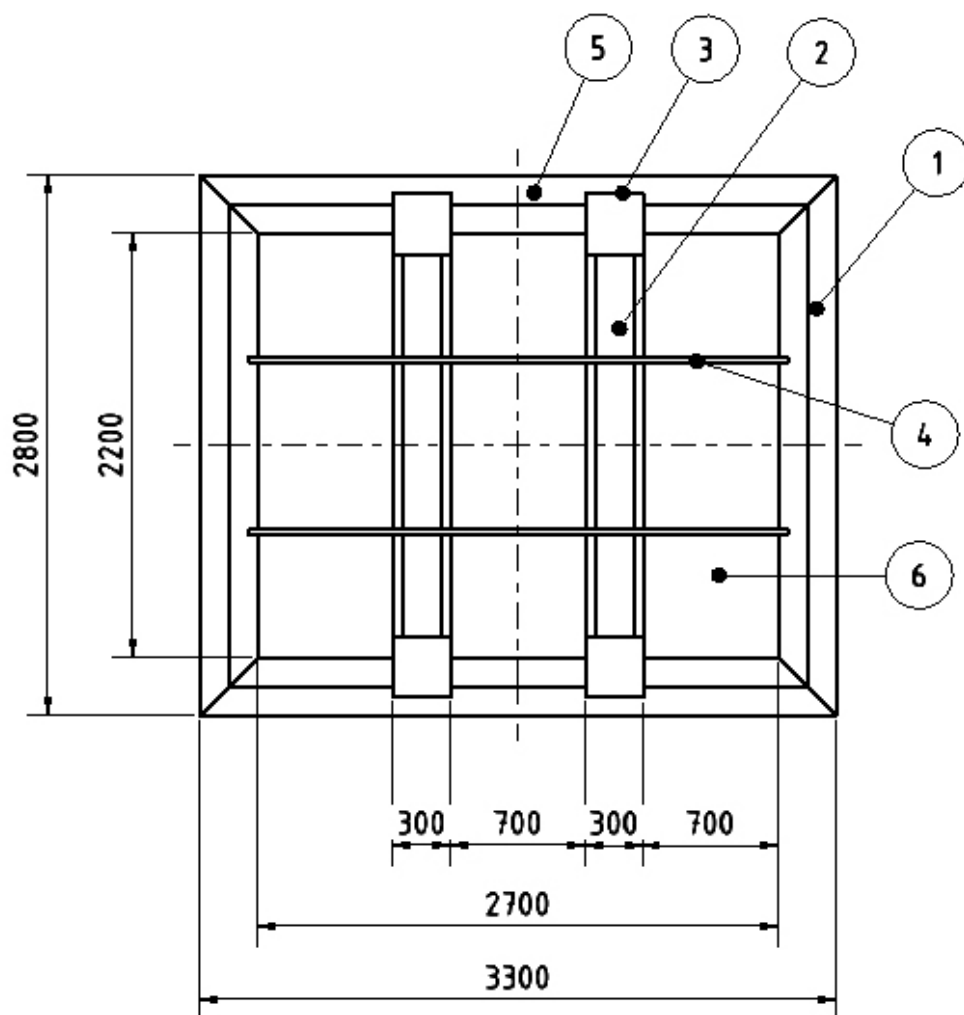
### 0.1 Popis zařízení

Celý uzávěr se skládá ze zárubně, křídla, závěsů a těsnění. Křídlo, na které bude ve výpočtu kladen důraz, jelikož je nosným prvkem této konstrukce a bude zachycovat nejvyšší zatížení, je svařenec a dále se skládá ze stojiny, vodorovného svařence, svislé příčky, spojovacího plechu mezi příčkou a rámem, tří válcových stěn (membrán) a vodorovné příčky (obrázek 1). Vodorovná příčka ale není nosná, proto ve výpočtu nebude zahrnuta.

Rozměry dveří jsou na obrázku 1. Jsou zde zakótovány pouze ty hlavní, podrobnější rozměry budou uvedeny vždy při výpočtech.

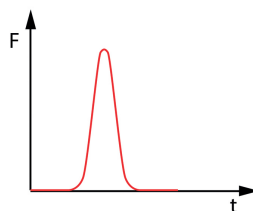
## 1 Problematika rázového zatížení

Výbuch, kterým budou dveře zatěžovány, je děj rázový - zátěžná síla prudce vzroste a prudce klesne (obrázek 2). Pevnostní výpočty se provedou pro statické



Obrázek 1: Popis křídla: 1 - stojina, 2 - svislá příčka, 3 - spojovací plech, 4 - vodorovná příčka, 5 - vodorovný svařenec, 6 - membrána.

zatížení (v čase neměnné, obrázek 3), s následnou korekcí: platí, že velikosti sil při rázovém zatížení odpovídají dvojnásobným hodnotám sil při zatížení statickém [1]. Jelikož jsme v oblasti lineární pružnosti a pevnosti, napětí a síly jsou si přímo úměrné, můžeme síly ponechat a zdvojnásobit až napětí.



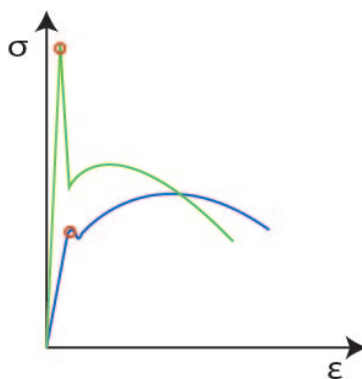
Obrázek 2: Graf průběhu rázové síly, osa F - síla, osa t - čas.



Obrázek 3: Graf průběhu statické síly, osa F - síla, osa t - čas.

## 1.1 Chování materiálu při rázovém zatížení

Korekce zatížení není jediná úprava, kterou pro tento případ musíme provést. Na rychlosti namáhání jsou totiž závislé i vlastnosti materiálu. Pokud by se jednalo o zatížení statické, vlastnosti by se klasicky řídily výsledky tahové zkoušky (obrázek 4), kdy modul pružnosti je nezávislý na rychlosti namáhání. V případě rázu se mez pevnosti  $R_m$  a mez kluzu  $R_e$  zvětšují (obrázek 4), mohou vzrůst až na několikanásobné hodnoty [3]. Pro běžnou ocel se statickou mezí kluzu cca 200MPa může vzrůst i na 1000MPa.



Obrázek 4: Diagram při rázovém a statickém zatížení s červeně vyznačenou mezí kluzu; na vodorovné ose deformace, na svislé ose napětí; modře statické zatížení, zeleně rázové zatížení.

Výsledná mez kluzu se dá stanovit například z Cowper-Symondsova vzorce [4]:

$$\sigma = \sigma_Y \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{C} \right)^{\frac{1}{P}} \right], \quad (1)$$

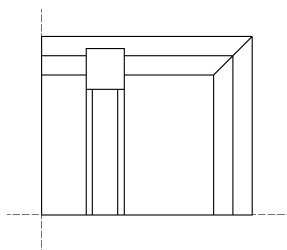
kde  $\dot{\epsilon}$  je rychlost deformace,  $\sigma_Y$  je mez kluzu zjištěna z tahové zkoušky při normální rychlosti a  $C$  a  $P$  jsou Cowper-Symondsovy konstanty.

Cowper Symondsovy konstanty nabývají pro obyčejnou konstrukční ocel (třída 11) hodnot  $C = 40$ ,  $P = 5$ . [2]

V našem případě ale neznáme rychlost deformace, takže výslednou mez kluzu spočítat nemůžeme.

## 2 Výpočtový model pro analytický výpočet

Dveře jsou symetrické, takže pro výpočet můžeme využít hned dvojí symetrie, počítat pouze se čtvrtinou dveří při určení vhodných podmínek (obrázek 5).



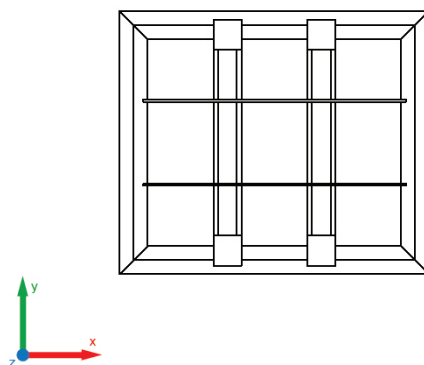
Obrázek 5: Čtvrtina dveří po aplikaci symetrie (pouze nosné části).

Pro výpočet je válcová stěna uvažována jako tenkostěnná nádoba zatížená vnitřním tlakem, pro zjednodušení bude použita membránová teorie.

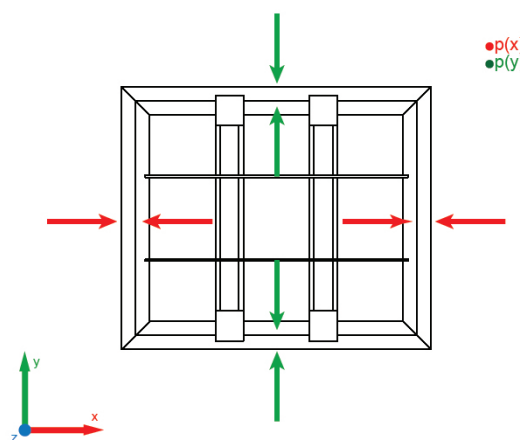
Vodorovný svařenec, stojinu a svislou příčku uvažujeme jako nosníky.

Tlak působí ve všech směrech (tlak se šíří všemi směry), v některých se pak výslednice sil vyruší. Pokud budeme počítat se souřadným systémem na obrázku 6,

tak se nám výslednice sil od tlaků ve směru os  $x$  a  $y$  vyruší (obrázek 7) a dveře bude zatěžovat pouze složka tlaku  $p(z)$  (obrázek 8).



Obrázek 6: Souřadný systém křídla.

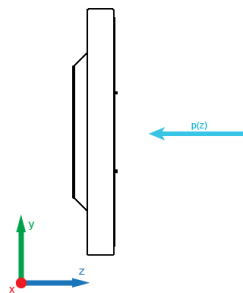


Obrázek 7: Vyrušení tlaku v osách  $x$  a  $y$ .

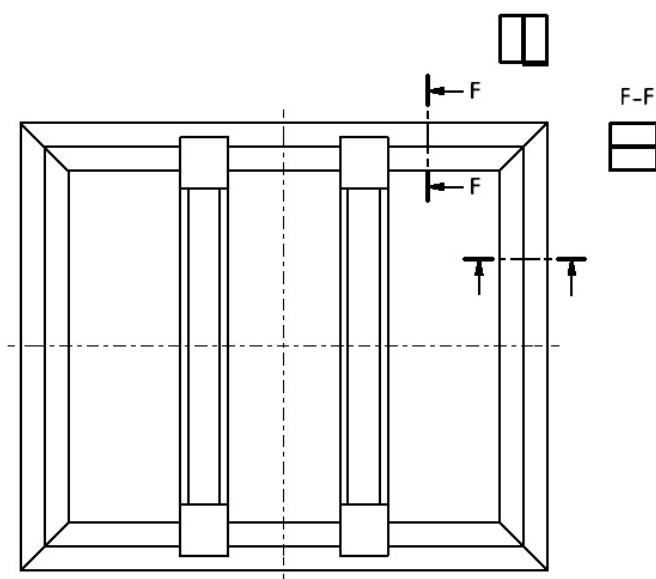
Tímto budou svislé příčky křídla namáhány prostým ohybem. Stojina a vodorovný svařenec se ohýbat nebudou, jelikož jsou silně podepřené zárubní, budou však namáhány na krut (výslednice síly bude kolmá na povrch a bude působit mimo střed, viz obrázek 10).

Dále nesmíme zapomenout na vazby mezi prvky – vazebné síly mezi příčkami, membránami a rámem.

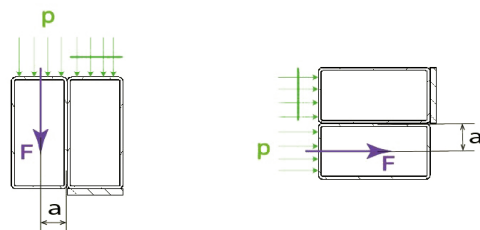




Obrázek 8: Tlak v ose z.



Obrázek 9: Řezy rámu.



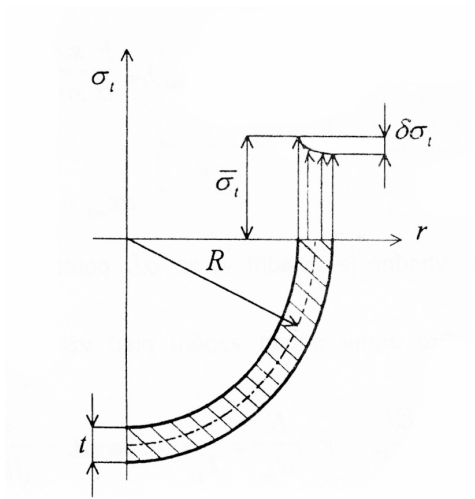
Obrázek 10: Zatížení rámu: působí tlak  $p$ ; v jedné části se profil opírá přímo o zárubeň, zde tlak nemá význam (je přeškrtnut); tam, kde zárubeň rám už nepodpírá, působí výslednice tlaku na plochu  $F$  na rameni  $a$  a tvoří tak kroutící moment  $F \cdot a$ .

### 3 Teorie pružnosti a pevnosti

V této kapitole budou stručně uvedeny a vysvětleny ty teorie pružnosti a pevnosti, které jsou použity pro další výpočty.

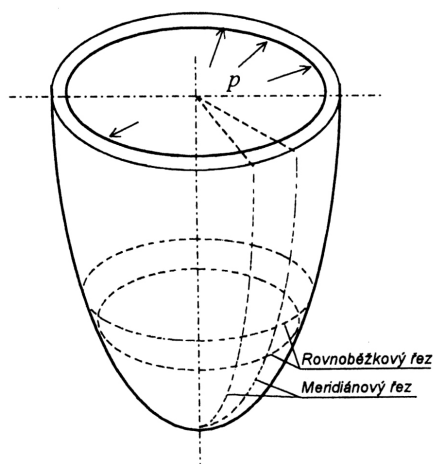
#### 3.1 Membránová teorie rotačně symetrických tenkostěnných nádob

[6] Tenkostěnná nádoba je taková nádoba, jejíž tloušťka stěny je oproti ostatním rozměrům velmi malá. U nádob je obecně průběh napětí podél tloušťky stěny hyperbolický; zde – u nádob tenkostěnných - ho ale považujeme za rovnoměrně rozložené (obrázek 11).

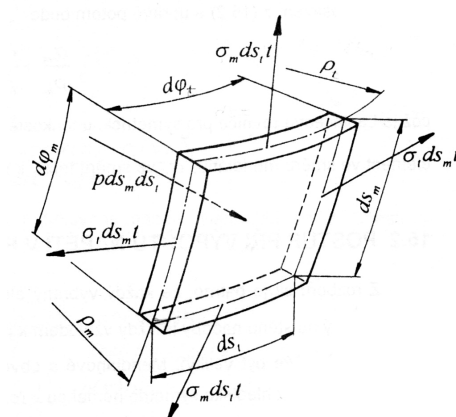


Obrázek 11: Skutečný průběh napětí podél stěny tenkostěnné nádoby. Převzato z [6], s. 54, obr. 15.1.

Máme rotačně symetrickou nádobu. Pomocí dvou řezů meridiánových a dvou rovnoběžníkových (obrázek 12) dostaneme prvek nádoby (obrázek 13). Ten je charakterizován poloměrem zakřivení v meridiánové rovině  $\rho_m$  a v obvodovém směru  $\rho_t$ .



Obrázek 12: Řezy tenkostěnnou nádobou. Převzato z [6], s. 55, obr. 15.2.

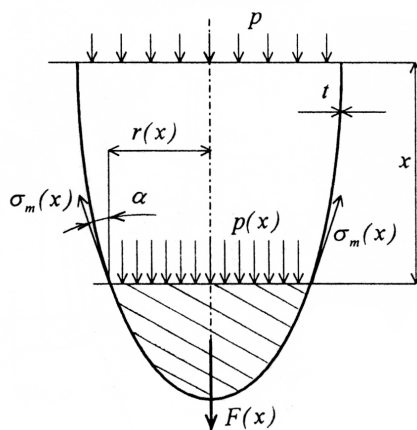


Obrázek 13: Prvek tenkostěnné nádoby:  $\rho_m$  je poloměr zakřivení střednice v meridiánové rovině,  $\rho_t$  poloměr zakřivení střednice v obvodovém směru,  $\sigma_t$  napětí obvodové,  $\sigma_m$  napětí meridiánové,  $ds_t$  šířka elementu v obvodovém směru,  $ds_m$  šířka elementu v meridiánové rovině,  $p$  tlak a  $t$  tloušťka stěny. Převzato z [6], s. 55, obr. 15.2.

Podmínku rovnováhy prvku pak vyjadřuje Laplaceův vzorec:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}. \quad (2)$$

Sám o sobě ale nestačí, protože jsou v této rovnici dvě neznámé ( $\sigma_m$  a  $\sigma_t$ ). Proto je třeba další rovnice, aby vznikla soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Tou druhou rovnicí je rovnice rovnováhy v řezu kolmém na osu rotace (obrázek 14).



Obrázek 14: Rovnováha v řezu kolmém na osu rotace. Převzato z [6], s. 56, obr. 15.4.

Ve svislém směru působí tyto síly: síla  $F_p$  od tlaku kapaliny  $p$  nad řezem na ploše  $S = \pi r^2(x)$ , tíha kapaliny pod řezem  $F(x)$  a síla  $F_m$  od meridiánového napětí  $\sigma_m$  působícího na ploše  $S = 2\pi r(x)t$  a pod úhlem  $\alpha$ . Poloměr  $r(x)$  je obecný poloměr střednice.

Podmínka rovnováhy:

$$F_m = F_x + F_p \quad (3)$$

se dá dále rozepsat:

$$\sigma_m(x) \cos \alpha 2\pi r(x)t = p\pi r^2(x) + F(x), \quad (4)$$

kde si dále poloměr  $r(x)$  a tíhu  $F(x)$  vyjádříme jako funkci souřadnice  $x$  a úhel  $\alpha$  jako funkci známých veličin. Výsledkem bude  $\sigma_m$  v závislosti na souřadnici, pak stanovíme extrémní (maximální) hodnotu pro pevnostní kontrolu.

Nyní máme dvě rovnice o dvou neznámých a můžeme vypočítat napjatost. Jedná se o dvouosý stav namáhání, takže bude nakonec potřeba ještě použít hypotézu pevnosti.

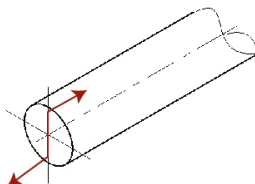
Poměr mezi tloušťkou stěny a zbývajících rozměry nádoby ale není jedinou podmínkou pro použití membránové teorie. Dále musí platit, že smyková napětí v rovinách řezů jsou nulová, působící složky napětí jsou podél celého obvodu konstantní

(předpoklady rotační symetrie) a napjatost nesmí být ovlivněna deformací nádoby. Těmto zásadám musí odpovídat geometrie, zatížení a uložení nádoby:

- spojitá křivost nádoby
- spojitá a velmi málo proměnná tloušťka nádoby
- zatížení z uložení musí ležet v rovině tečné k rovině střední, pokud tomu tak není, lze vycházet ze Saint-Venantova principu
- spojitě a málo proměnné zatížení
- zatížení pouze vnitřním tlakem

### 3.2 Prostý ohyb

[5] Prostý ohyb nastane v případě, kdy výsledná vnitřní síla vyvolaná vnějším zatížením tvoří moment neboli silovou dvojici, která leží v rovině kolmé k průřezu a prochází střednicí (obrázek 15).



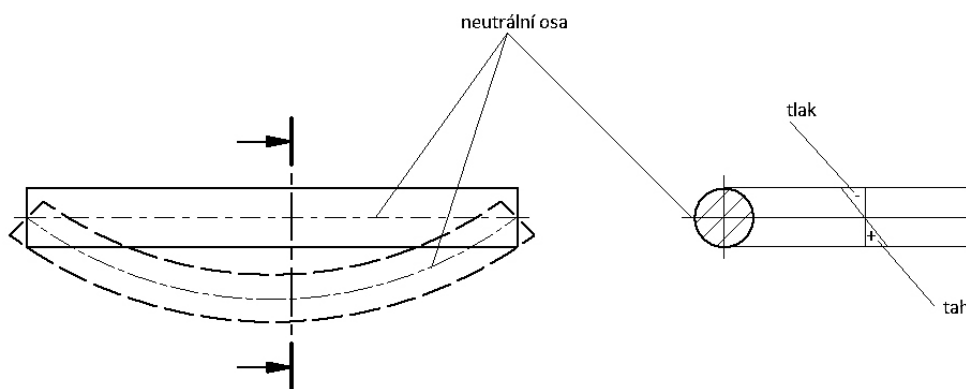
Obrázek 15: Ohybový moment.

Základní předpoklady:

1. Příčné průřezy zůstávají rovinné, nebortí se.
2. Při zatížení prostým ohybem vzniká v prutu jednoosá napjatost ve směru osy  $x$  závislá na souřadnicích  $y$  a  $z$ .

Průběh vnitřních statických účinků v průřezu pak vypadá následovně: jedna krajní vlákna jsou tažena, druhá stlačována. Existují vlákna, ve kterých je nulové napětí

(neprodlužují se, ani nezkracují) a těm říkáme neutrální osa (obrázek 15). Pokud je nosník přímý, neutrální osa prochází těžištěm průřezu.



Obrázek 16: Vlákná při zatížení.

Pokud se budeme držet souřadného systému obrázku 17, pak napětí vyvolané ohybovým momentem působícím v rovině  $zx$  se vypočte dle vztahu:

$$\sigma_x = \frac{M_o}{I_{yt}} z, \quad (5)$$

kde  $\sigma_x$  je napětí (ve směru osy  $x$ ),  $M_o$  je ohybový moment zatěžující nosník,  $z$  je vzdálenost vlákna od neutrální osy (těžiště průřezu v tomto případě) a  $I_{yt}$  je tzv. moment setrvačnosti průřezu k těžišti k ose  $y$ .



Obrázek 17: Souřadný systém nosníku.

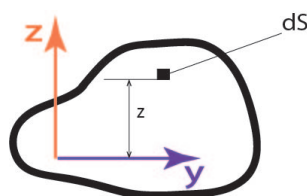


Aby se jednalo o prostý ohyb, musí zatížení procházet jednou z hlavních centrálních os setrvačnosti. V případě symetrických průřezů se jedná o jejich osy symetrie.

### 3.2.1 Moment setrvačnosti

Momenty setrvačnosti jsou definovány k osám. Pokud je zatížení kolmé na osu  $y$ , počítáme moment setrvačnosti k ose  $y$ , pokud na osu  $z$ , moment setrvačnosti k ose  $z$ . Moment setrvačnosti průřezu k ose  $y$  se obecně vypočte (obrázek 18):

$$I_y = \int z^2 dS. \quad (6)$$



Obrázek 18: Obecný průřez,  $dS$  je elementární plocha,  $z$  vzdálenost na ose  $z$  od počátku souřadného systému.

V případě momentu setrvačnosti k ose  $z$  je výpočet stejný, pouze se záměnou souřadnic.

Pro běžné průřezy ho nalezneme v literatuře.

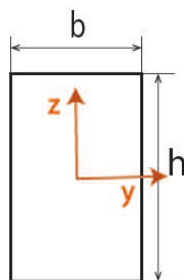
Například pro obdélník je moment setrvačnosti k těžišti k ose  $y$  pro obrázek 19:

$$I_{yt} = \frac{bh^3}{12}. \quad (7)$$

Pokud umíme složitý průřez rozdělit na několik jednoduchých, pak v případě, že mají všechny dílčí průřezy shodné těžiště, je můžeme prostě sečítat.

Pokud mají odlišná těžiště, musíme vypočítat momenty setrvačnosti dílčích průřezů k těžišti celého průřezu a potom je sečíst. Momenty k jiné než těžištní ose se vypočtou pomocí Steinerova vztahu:

$$I = I_t + o^2 \cdot S, \quad (8)$$



Obrázek 19: Moment setrvačnosti obdélníka k ose y.

kde  $I$  je moment setrvačnosti k jiné než těžištní ose,  $I_t$  moment setrvačnosti k těžišti,  $o$  vzdálenost těžištní osy od osy, ke které počítáme moment setrvačnosti  $I$  a  $S$  je plocha průřezu.

Vzdálenost os y procházejících těžištěm se rovná vzdálenosti z-ových souřadnic těžiště a naopak.

Pokud opět budeme počítat se zatížením kolmým na osu y a zavedeme si souřadný systém celého průřezu, polohu těžiště celkového průřezu můžeme vypočítat dle rovnice:

$$z_t = \frac{\sum z_t(i) \cdot S(i)}{\sum S(i)}, \quad (9)$$

kde  $z_t(i)$  jsou souřadnice těžiště dílčích průřezů a  $S(i)$  obsahy jejich ploch.

Při pevnostních kontrolách nás samozřejmě zajímá nejvyšší napětí, a tak do výše uvedeného vzorce (5) dosazujeme maximální vzdálenost vláken od neutrální osy (obrázek 17) a maximální ohybový moment, který zjistíme z průběhu vnitřních statických účinků.

### 3.2.2 Vyšetřování vnitřních statických účinků

Vyšetřování vnitřních statických účinků prochází těmito body:

- stanovení počtu stupňů volnosti - musíme určit, zda bude soustava v klidu a zda si pro výpočet reakcí vystačíme s rovnicemi rovnováhy, pokud ne, musíme doplnit deformační podmínky
- uvolnění - neboli nahrazení vazebných účinků silami

- výpočet reakcí
- vyjádření ohybového momentu v závislosti na souřadnici  $x$  (v souladu se souřadným systémem na obrázku 17)
- nález maximálního ohybového momentu

### 3.2.3 Deformace při ohybu podle Castigliana

Někdy nás kromě napětí zajímají i vzniklé deformace. V případě ohybu se jedná o průhyb a úhel natočení průřezu.

Existují dva způsoby stanovení deformací: metoda analytická a metoda Castiglianova. Zde se budeme zabývat jednodušší a rychlejší Castiglianovou metodou.

Průhyb se vypočte dle vzorce:

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx, \quad (10)$$

kde  $E$  je modul pružnosti materiálu,  $I$  je plošný moment setrvačnosti průřezu,  $M(x)$  je obecný ohybový moment na intervalu  $< 0; l >$  vyjádřený jako funkce souřadnice  $x$ ,  $F$  je síla, pod kterou se nachází hledaný průhyb.

Úhel natočení se vypočte obdobně:

$$\varphi = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx. \quad (11)$$

Jediný rozdíl spočívá v tom, že se moment v závislosti na souřadnici  $x$  derivuje momentem, pod kterým chceme zjistit úhel natočení.

Pokud hledáme průhyb nebo úhel natočení v místě, kde se nenachází síla nebo moment, pak si v tomto místě můžeme vytvořit sílu nebo moment rovnu nule.

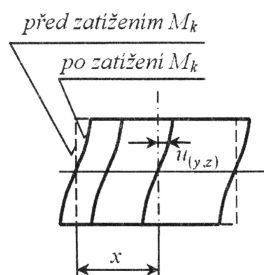
Reakce z vazebných účinků musíme vyjádřit jako funkci síly nebo momentu, podle kterého se derivuje.

Tato metoda se dá velmi dobře využít i na řešení staticky neurčitých úloh, kdy potřebujeme k rovnicím rovnováhy další rovnice - deformační podmínky, abychom získali  $n$  rovnic o  $n$  neznámých.

Provádí se to tak, že si staticky neurčitý nosník převedeme na staticky určitý nosník tím způsobem, že některé reakce označíme jako zatížení. Pak pod touto reakcí/-zatížením určíme deformační podmínku - pokud se jednalo o reakci zamezující posuv, pak průhyb pod touto silou se bude rovnat nule; pokud vazba zamezovala natočení (reakcí je moment), v tomto místě pod tímto momentem bude nulové natočení.

### 3.3 Volné kroucení nekruhových průřezů

[7] U volného kroucení předpokládáme, že přemístění  $u$  je závislé pouze na souřadnicích  $y$  a  $z$  (obrázek 20).



Obrázek 20: Přemístění. Převzato z [7], s. 59, obr. 8.0.1.

Napětový stav je popsán soustavou 2 diferenciálních rovnic (obrázek 21):

$$-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2G\vartheta \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

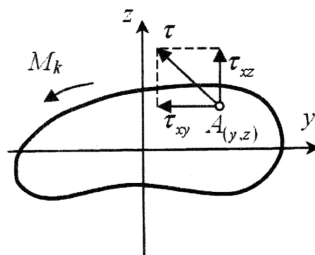
kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $\vartheta$  je úhel zkrutu prutu na délce 1 m.

Těmto rovnicím lze vyhovět jedinou funkcí  $\Phi$  (tzv. Prandtlova funkce), která se určí vztahem:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(y,z)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{(y,z)}}{\partial z^2} = \pm 2G\vartheta. \quad (14)$$

Známe-li Prandtlovu funkci  $\Phi$ , můžeme z ní dopočítat složky napětového stavu:

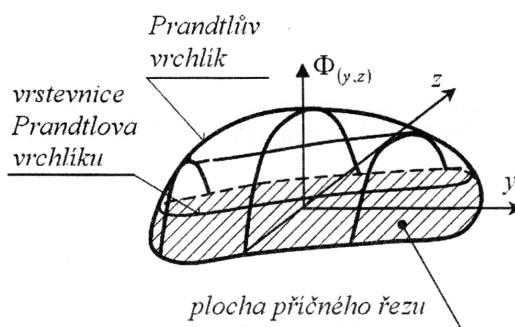
$$\tau_{xy} = \pm \frac{\partial \Phi_{(y,z)}}{\partial z} \quad (15)$$



Obrázek 21: Složky smykového napětí. Převzato z [7], s. 59, obr. 8.0.2.

$$\tau_{xz} = \mp \frac{\partial \Phi_{(y,z)}}{\partial y}. \quad (16)$$

Hodnoty Prandtlovy funkce pak určují hranice „Prandtlův vrchlík“, který si můžeme představit nad průřezem (obrázek 22).

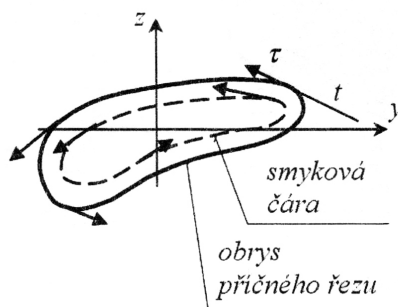


Obrázek 22: Prandtlův vrchlík. Převzato z [7], s. 60, obr. 8.0.6.

### Pro libovolný tvar příčného řezu platí:

1. Na obrysu průřezu je hodnota funkce  $\Phi$  konstantní. Pokud je příčný řez ohraničený jednou čarou, můžeme zvolit  $\Phi=0$ . Pokud má řez více obrysových čar, např. uzavřený profil, profil s otvory, je na každém obrysu funkce konstantní a jejich hodnoty se liší.

2. „Smykové napětí je tečnou k obrysu příčného řezu a také tečnou ke smykové čáře, přičemž smyková čára je průmět vrstevnice Prandtlova vrchlíku do roviny příčného řezu.“ (Převzato z [7], s. 60.) (obrázek 23).

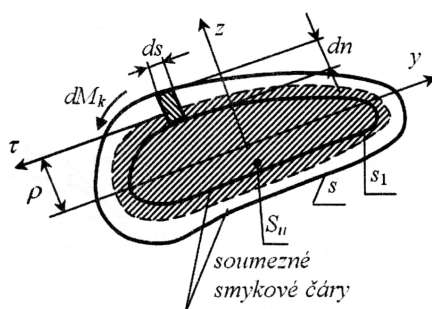


Obrázek 23: Smyková čára a napětí. Převzato z [7], s. 61, obr. 8.0.7.

3. Membránová analogie: „Tenká membrána, uchycená na obrysu krouceného průřezu, zatížená malým přetlakem zaujme tvar Prandtlova vrchlíku.“ (Převzato z [7], s. 61.)
4. „V plošce mezi soumeznými smykovými čarami  $s$  a  $s_1$  (obrázek 24) je přenášen krouticí moment

$$dM_k = \int_S \tau dn ds \rho = \tau dn \int_S \rho ds = \tau dn 2S_u, \quad (17)$$

kde  $S_u$  je obsah plochy vymezené smykovou čarou  $s$ .“ (Převzato z [7], s. 61.)



Obrázek 24: Soumezné smykové čáry a plocha jimi ohraničená. Převzato z [7], s. 62, obr. 8.0.10.

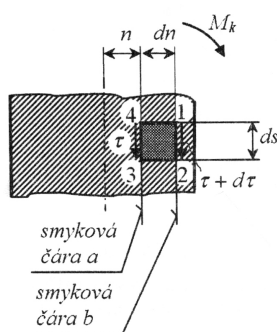


5. „V uzavřené čáře plochy příčného řezu platí Stokesova věta.“ (Převzato z [7], str.62.) Stokesova věta podél smykové čáry  $s$  (obrázek 24):

$$\int_S \tau ds = 2G\vartheta S_u. \quad (18)$$

Aplikace Stokesovy věty na přímočarý element (obrázek 25):

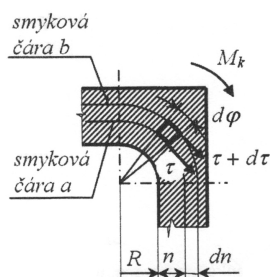
$$d\tau = 2G\vartheta dn, \quad (19)$$



Obrázek 25: Přímochařý element. Přeřvato z [7], s. 62, obr. 8.0.11.

na zakřivený element (obrázek 26):

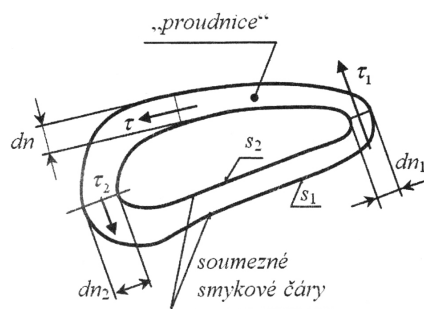
$$R \frac{d\tau}{dn} + \tau = 2G\vartheta R. \quad (20)$$



Obrázek 26: Křivočarý element. Převzato z [7], s. 62, obr. 8.0.12.

6. Hydrodynamická analogie: „Smykový tok mezi dvěma smykovými čarami je konstantní“ (Převzato z [7], s. 61.) (obrázek 27):

$$d\Phi = \tau dn = \tau_1 dn_1 = \tau_2 dn_2. \quad (21)$$



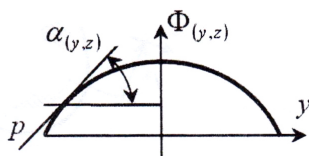
Obrázek 27: Hydrodynamická analogie. Převzato z [7], s. 61, obr. 8.0.09.

7. „Smykové napětí je úměrné sklonu spádové přímky p Prandtlova vrchlíku“ (Převzato z [7], s. 61.) (obrázek 28):

$$\tau = \pm \frac{d\Phi}{dn} = tg\alpha_{(y,z)}, \quad (22)$$

když

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz. \quad (23)$$



Obrázek 28: Spádová přímka. Převzato z [7], s. 61, obr. 8.0.08.

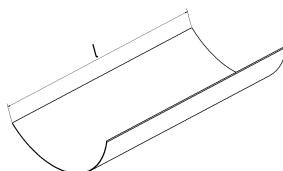
8. Vztah mezi „objemem“ Prandtlova vrchlíku a kroutícím momentem:

$$M_k = 2V_\Phi. \quad (24)$$

## 4 Analytický výpočet

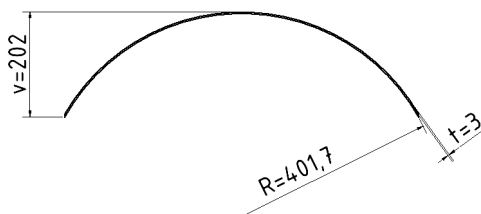
Při výpočtu se bude postupovat tak, aby z předchozí kapitoly byly známy výsledky reakcí, které přes vazby zatěžují další součásti. Začneme membránou, která je zatěžovaná pouze tlakem. Dále budeme pokračovat příčkou, která kromě tlaku bude zatěžovaná vazbou od membrány. Nakonec zařadíme výpočet rámu, který bude zatěžován vazbou jak od membrány, tak od příčky.

### 4.1 Válcová stěna - membrána



Obrázek 29: Membrána ve 3D zobrazení.

Membrána se svými rozměry je znázorněna na obrázku 30.



Obrázek 30: Membrána s charakteristickými rozměry.

Laplaceova rovnice (2):

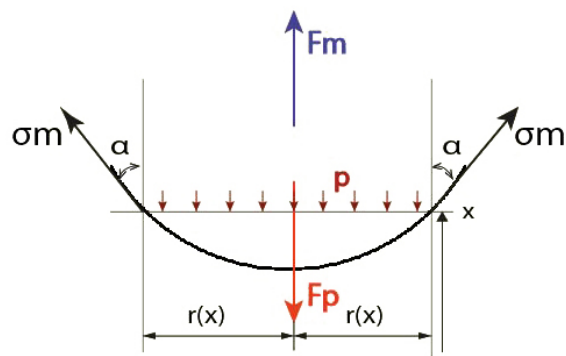
$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}. \quad (25)$$

V tomto případě  $\rho_m = \infty$ ; poloměr v obvodovém směru musí být poloměrem střednice, ten snadno vypočteme:  $\rho_t = \frac{401,7+401,7+3}{2} = 403,2\text{mm}$ ; dále zadaný tlak  $p = 0,83\text{MPa}$  a  $t = 3\text{mm}$ .

Protože  $\rho_m = \infty$ , člen  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} = 0$ , a tak můžeme ihned vypočíst obvodové napětí:

$$\sigma_t = \frac{p}{t} \rho_t = \frac{0,83}{3} 403,2 = 111 \text{ MPa.} \quad (26)$$

Abychom získali meridiánové napětí, napíšeme si rovnici rovnováhy dle obrázku 31 obdobně jako v rovnici (4), tíhovou sílu od média záměrně zanedbáváme, jelikož se jedná o vzduch.



Obrázek 31: Rovnice rovnováhy v řezu.

Rovnice tedy bude:

$$F_p = F_m, \quad (27)$$

tlak  $p$  působí na ploše řezu  $2r(x)l$ , napětí meridiánové  $\sigma_m$  na dvou plochách  $tl$  pod úhlem  $\alpha$ :

$$p2r(x)l = \sigma_m \cos \alpha t l. \quad (28)$$

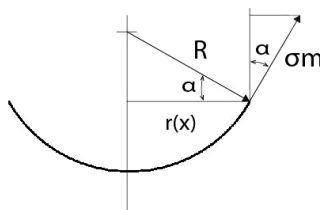
Výraz  $\cos \alpha$  si můžeme vyjádřit pomocí poloměrů, pokud využijeme pravidla, že přímky kolmé na původní svírají stejný úhel jako ony (obrázek 32). Poloměr  $r(x)$  je ve vodorovném směru, kolmý na svislici. Napětí  $\sigma_m$  je tečné, tzn. musí být kolmé k poloměru  $R$ .

Takže dostaneme:

$$\cos \alpha = \frac{r(x)}{R}. \quad (29)$$

Dosadíme do rovnice (28):

$$p2r(x)l = \sigma_m \frac{r(x)}{R} t l. \quad (30)$$

Obrázek 32: Přepočet úlu  $\alpha$ .

Po vykrácení nám zbyde:

$$p = \sigma_m \frac{1}{R} t, \quad (31)$$

$$\sigma_m = \frac{pR}{t} = \sigma_t = 111 \text{MPa}. \quad (32)$$

Na závěr je třeba využít hypotézu, např. HMH:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t}. \quad (33)$$

Jelikož  $\sigma_m = \sigma_t$ , tak položíme  $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$  a získáme

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 - \sigma \cdot \sigma} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma = 111 \text{MPa}. \quad (34)$$

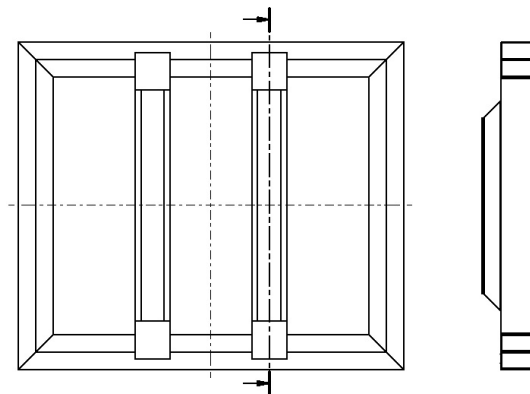
## 4.2 Příčka

Příčka je vázána k rámu a k membráně (obrázek 33 a 34).

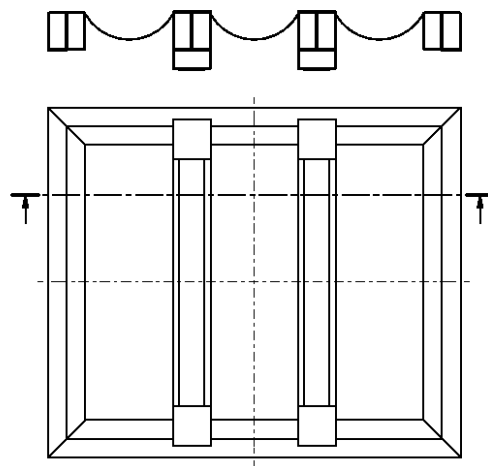
V případě rámu se bude jednat o podporu příčky. Nahradit bychom ji mohli buďto pomocí pevného kloubu nebo vetknutí. Skutečnost bude někde mezi tím. Pro možnost porovnání bude výpočet proveden pro obě verze.

V případě membrán se bude jednat o přenos reakce membrány vazbou do zatížení nosníku, obrázky 35 a 36.

Primárně bude samozřejmě příčka namáhaná tlakem  $p$  od výbuchu (obrázek 37).



Obrázek 33: Vazba mezi rámem a příčkou.



Obrázek 34: Vazba mezi příčkou a membránou.

Celkové zatížení převedeme na spojité zatížení  $q$  (působí po celé délce), které bude mít dvě složky - od tlaku  $q_m$  a od membrány  $q_p$ :

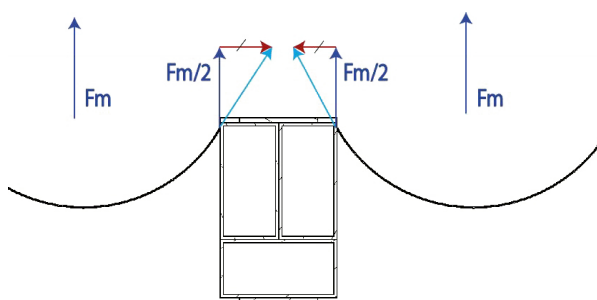
$$q = q_m + q_p. \quad (35)$$

Spojité zatížení se obecně určí jako podíl působící síly a délky, na které působí:

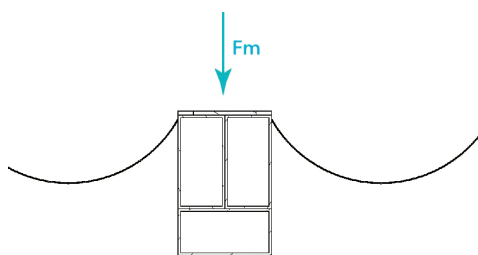
$$q = \frac{F}{l}. \quad (36)$$

Pro zatížení od membrány použijeme výslednou sílu od meridiánového zatížení  $F_m$ , která se rozkládá po celé délce  $l$ , z rovnic (27), (28), (29), (30) pak dostaneme:

$$q_m = \frac{F_m}{l} = \sigma_m \frac{r}{R} t^2, \quad (37)$$



Obrázek 35: Vazba mezi membránou a příčkou, vyobrazení reakce membrány - světle modrou je vyznačena celá reakční síla, ta se dá rozložit do vodorovného (červená) a svislého (tmavě modrá) směru, složky ve vodorovném směru se odečtou, složky ve svislém se sečtou; je třeba myslet na to, že membrána je uchycena ze dvou stran, takže na jedné straně, kde ji zachycuje příčka, bude reakční síla poloviční.



Obrázek 36: Vazba mezi membránou a příčkou, vyobrazení zatížení příčky - reakce v příčce má opačný směr co reakce membrány (zákon akce a reakce).

$$q_m = 111 \cdot \frac{348,5}{403.2} \cdot 3 \cdot 2 = 578 \text{ N/mm}, \quad (38)$$

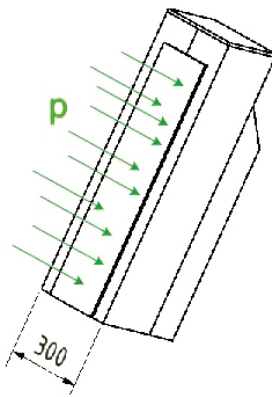
kde  $r$  je poloměr membrány (na střednici) ve výšce dotýkající se příčky, což můžeme snadno vypočíst dle obrázku 38:

$$r = \sqrt{R^2 - (R - v)^2}, \quad (39)$$

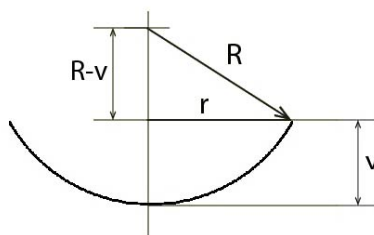
$$r = \sqrt{403.2^2 - (403.2 - 202)^2} = 348,5 \text{ mm}. \quad (40)$$

Pro zatížení tlakem dle obrázku 37 bude platit:

$$q_p = \frac{F_p}{l} = p \frac{S}{l} = p \frac{bl}{l} = pb, \quad (41)$$



Obrázek 37: Zatížení příčky tlakem  $p$ .



Obrázek 38: Schéma rozměrů.

kde  $F_p$  je síla od tlaku,  $S$  je plocha, na kterou působí tlak  $p$ ,  $l$  je délka plochy,  $b$  je šířka plochy, z obrázku 37  $b=300\text{mm}$ , takže:

$$q_p = 0,83 \cdot 300 = 249\text{N/mm.} \quad (42)$$

Celkové zatížení  $q$  pak bude:

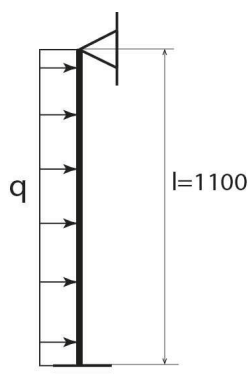
$$q = q_m + q_p = 578 + 249 = 827\text{N/mm.} \quad (43)$$

Příčka převedená na nosník ve verzi s kloubem s ohledem na symetrii bude pak vypadat takto - obrázek 39.

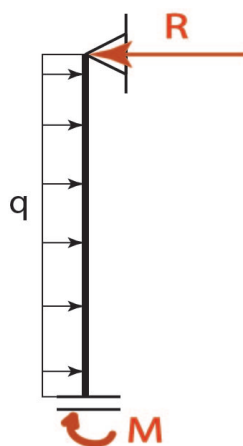
Provedeme uvolnění - obrázek 40.

Nesmíme zapomenout, že podmínka symetrie v tomto případě navíc určuje, že úhel natočení pod reakčním momentem  $M$  musí být roven nule.





Obrázek 39: Schéma nosníku - pevný kloub nahrazuje vazbu k rámu, suvná vazba určuje symetrii.



Obrázek 40: Uvolnění: R zamezuje posuvu, M zamezuje natočení.

Takže nejprve napíšeme rovnici ohybového momentu jako funkci souřadnice  $x$  (dle obrázku 41):

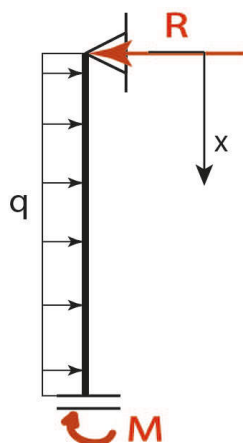
$$M(x) = R \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}. \quad (44)$$

$R$  je reakce, takže pro derivování podle  $M$  (podkapitola 3.2.3) si ji musíme vyjádřit jako funkci  $M$ , k tomu použijeme rovnici rovnováhy momentu k bodu  $S$  (viz obrázek 42):

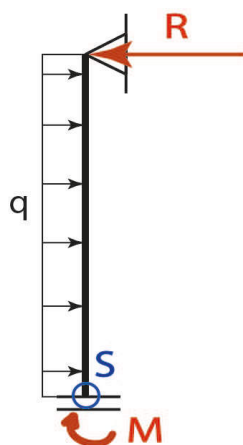
$$\Sigma M(S) = M + q \cdot \frac{l^2}{2} - R \cdot l = 0, \quad (45)$$

z toho

$$R = \frac{M}{l} + \frac{ql}{2}, \quad (46)$$



Obrázek 41: Směr souřadnice  $x$  pro vyjádření ohybového momentu.



Obrázek 42: Bod  $S$  pro vyjádření rovnice rovnováhy.

takže

$$\frac{\partial M_x}{\partial M} = \frac{x}{l} \quad (47)$$

a můžeme napsat dle vzoru rovnice (11):

$$\varphi_M = \frac{1}{EI} \int_0^{1100} \left( R \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot \frac{x}{l} dx = 0, \quad (48)$$

výraz bude roven nule pouze pokud

$$\int_0^{1100} \left( R \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot \frac{x}{l} dx = 0. \quad (49)$$

Po dosazení  $l = 1100\text{mm}$ ,  $q = 827\text{ N/mm}$  a po integraci dostaneme:

$$R = 3,4 \cdot 10^5 \text{ N} \quad (50)$$

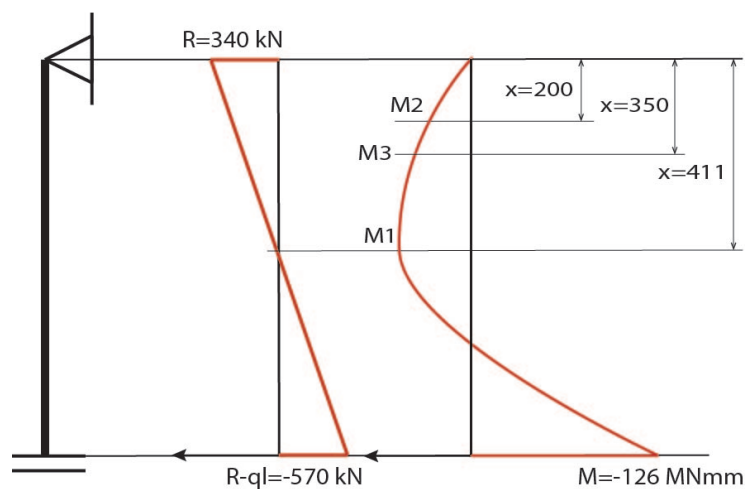
a když dosadíme do rovnice rovnováhy (45):

$$M = R \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2}, \quad (51)$$

získáme reakční moment

$$M = 3,4 \cdot 10^5 - 827 \cdot \frac{1100^2}{2} = -1,263 \cdot 10^8 \text{ Nmm}. \quad (52)$$

Vykreslíme si průběh posouvající síly a ohybového momentu (obrázek 43).



Obrázek 43: Průběh posouvající síly  $N$  a ohybového momentu  $M$ .

Funkce ohybového momentu pod spojitým zatížením má tvar paraboly, v místě, kde je posouvající síla  $N$  nulová má tato parabola své maximum (Schwedlerovy věty), proto musíme dopočítat hodnotu v tomto místě, mohla by být maximálním ohybovým momentem.

Nejprve vypočítáme vzdálenost, ve které jsou posouvající síly rovny nule, pro tento účel si napíšeme rovnici rovnováhy sil:

$$\Sigma F = R - q \cdot x, \quad (53)$$

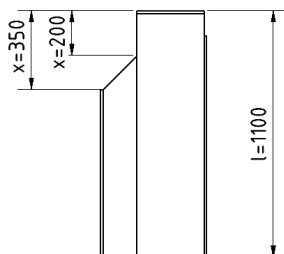
$$R - q \cdot x = 0, \quad (54)$$

$$x = \frac{R}{q} = \frac{3,4 \cdot 10^5}{827} = 411 \text{ mm}. \quad (55)$$

Ted' stačí dopočítat moment pro  $x=411\text{mm}$  (dle rovnice (44)):

$$M_1 = M(411) = R \cdot 411 - q \cdot \frac{411^2}{2} = 7 \cdot 10^7 \text{Nmm} \quad (56)$$

Dále ve vzdálenosti  $x=200\text{mm}$  dochází ke změně průřezu (obrázek 44), tak je třeba znát moment v tomto místě pro výpočet místního napětí. Zeslabený průřez je až do délky  $350\text{mm}$ , pro zjednodušení až do této délky nejoslabenější, zanedbáme postupné zvětšování.



Obrázek 44: Rozměry příčky.

Momenty v těchto vzdálenostech pak vypočteme podobně jako v rovnici (56):

$$M_2 = M(200) = R \cdot 200 - q \cdot \frac{200^2}{2} = 5 \cdot 10^7 \text{Nmm}, \quad (57)$$

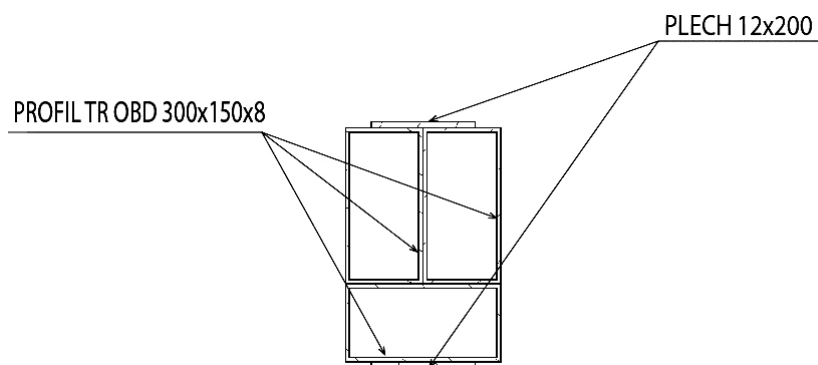
$$M_3 = M(350) = R \cdot 350 - q \cdot \frac{350^2}{2} = 6 \cdot 10^7 \text{Nmm}. \quad (58)$$

Globálně maximální ohybový moment má hodnotu  $M = 1,263 \cdot 10^8 \text{Nmm}$  a maximální moment v oblasti zeslabeného průřezu  $M_3 = 6 \cdot 10^7 \text{Nmm}$ .

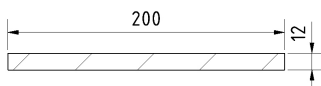
### Momenty setrvačnosti

Průřez příčky je složen z několika profilů (obrázek 45).

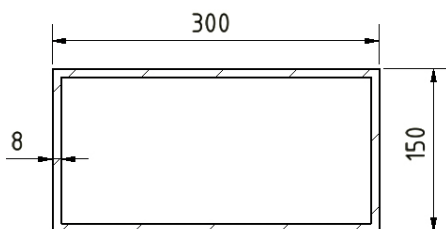
Přesné rozměry plechu a profilu jsou na obrázcích 46 a 47.



Obrázek 45: Průřez příčky je složen ze dvou plechů a tří profilů.



Obrázek 46: Rozměry plechu, převzato z [8].

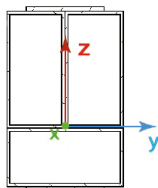


Obrázek 47: Rozměry profilu TROBD 300x150x8, převzato z [8].

Profil TROBD 300x150x8 má samozřejmě zaoblené hrany, pro namáhání ohybem jsou ale nepodstatné.

Do profilu zavedeme souřadný systém z obrázku 48. Zátěžná síla bude kolmá na osu  $y$ . To znamená, že k této ose budeme hledat momenty setrvačnosti.

Nejprve podle rovnice (9) vypočteme těžiště celkového průřezu při respektování souřadného systému z obrázku 48.



Obrázek 48: Souřadný systém průřezu.

Při výše uvedených rozměrech je pro:

- plech horní souřadnice těžiště: 306mm,
- oba profily nastojato: 150mm,
- profil naležato: -75mm,
- plech dolní: -156mm.

Obsah ploch dílčích průřezů:

- plech

$$S = 200 \cdot 12 = 2400\text{mm}^2, \quad (59)$$

- profily

$$S = (300 \cdot 150) - (284 \cdot 134) = 6994\text{mm}^2. \quad (60)$$

Nyní máme vše potřebné:

$$z_t = \frac{306 \cdot 2400 + 2 \cdot 150 \cdot 6944 - 75 \cdot 6944 - 156 \cdot 2400}{2400 + 3 \cdot 6944 + 2400} = 75\text{mm} \quad (61)$$

Dílčí momenty setrvačnosti k těžišti celého průřezu po vzoru rovnic (8) a (7):

- plech horní

$$I_{y1-1} = \frac{200 \cdot 12^3}{12} + (306 - 75)^2 \cdot 2400, \quad (62)$$

- profily nastojato

$$I_{y1-23} = \frac{150 \cdot 300^3}{12} - \frac{134 \cdot 284^3}{12} + (150 - 75)^2 \cdot 6944, \quad (63)$$

- profil naležato

$$I_{y1-4} = \frac{300 \cdot 150^3}{12} - \frac{284 \cdot 134^3}{12} + (-75 - 75)^2 \cdot 6944, \quad (64)$$

- plech dolní

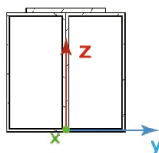
$$I_{y1-5} = \frac{200 \cdot 12^3}{12} + (-156 - 75)^2 \cdot 2400. \quad (65)$$

Nyní všechny momenty sečteme:

$$I_{y1} = I_{y1-1} + 2 \cdot I_{y1-23} + I_{y1-4} + I_{y1-23}, \quad (66)$$

$$I_{y1} = 6,8 \cdot 10^8 \text{mm}^4. \quad (67)$$

Obdobně výpočet provedeme pro zeslabený průřez. Ten se liší od plného tím, že mu chybí profil naležato a dolní plech, polohu souřadného systému ponecháváme (obrázek 49).



Obrázek 49: Průřez zeslabeného místa a jeho souřadný systém.

Dílčí těžiště průřezů:

- plech: 306mm,
- profily: 150mm.

Obsahy ploch samozřejmě zůstávají stejné.

Výpočet těžiště:

$$z_t = \frac{306 \cdot 2400 + 2 \cdot 150 \cdot 6944}{2400 + 2 \cdot 6944} = 173 \text{mm}. \quad (68)$$

Dílčí momenty setrvačnosti:

- plech

$$I_{y2-1} = \frac{200 \cdot 12^3}{12} + (306 - 173)^2 \cdot 2400, \quad (69)$$

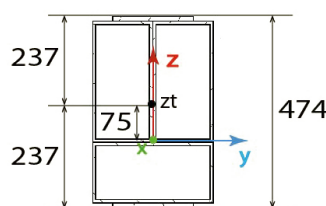
- profily nastojato

$$I_{y2-23} = \frac{150 \cdot 300^3}{12} - \frac{134 \cdot 284^3}{12} + (150 - 173)^2 \cdot 6944, \quad (70)$$

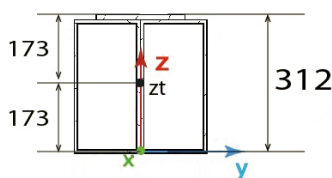
celkový moment setrvačnosti:

$$I_{y2} = I_{y2-1} + I_{y2-23} = 2 \cdot 10^8 \text{ mm}^4. \quad (71)$$

Ještě potřebujeme znát maximální vzdálenost neutrální osy od krajních vláken - jedná se o přímý nosník, takže neutrální osa prochází těžištěm. Maximální vzdálenosti pak z obrázků 50 a 51 jsou pro plný průřez  $z_{max1} = 237\text{mm}$  a pro zesabený  $z_{max2} = 173\text{mm}$ .



Obrázek 50: Vzdálenost krajních vláken od těžiště (neutrální osy) pro plný průřez.



Obrázek 51: Vzdálenost krajních vláken od těžiště (neutrální osy) pro zesabený průřez.

V tomto bodě již známe všechno pro výpočet napětí dle rovnice (5).



Pro plný průřez pak bude:

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_{y1}} z_{max1}, \quad (72)$$

$$\sigma_1 = \frac{1,263 \cdot 10^8}{6,8 \cdot 10^8} \cdot 237 = 44 \text{MPa}. \quad (73)$$

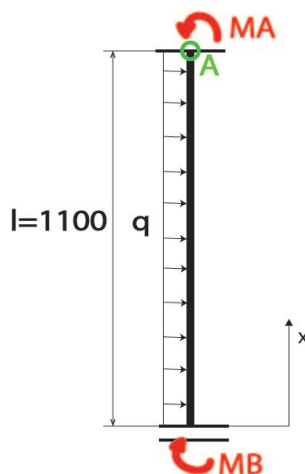
Pro oslabený průřez

$$\sigma_2 = \frac{M_3}{I_{y2}} z_{max2}, \quad (74)$$

$$\sigma_2 = \frac{6 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^8} \cdot 173 = 52 \text{MPa}. \quad (75)$$

V případě  $\sigma_2$  bude ve skutečnosti napětí menší (postupný přechod z oslabeného na plný průřez).

Pro možnost porovnání zde bude uveden ještě výpočet s vetknutím místo kloubu (obrázek 52).



Obrázek 52: Schéma příčky jakožto nosníku s vetknutím.

Výpočet bude velmi podobný výpočtu s kloubem.

Napíšeme si obecnou rovnici ohybového momentu jako funkci souřadnice x:

$$M(x) = M_B - q \cdot \frac{x^2}{2}. \quad (76)$$

Rovnováha momentů k bodu A:

$$\Sigma M(A) = M_B - q \cdot \frac{l^2}{2} - M_A = 0, \quad (77)$$

derivace rovnice momentu dle momentu  $M_B$ :

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_B} = 1. \quad (78)$$

Podmínka symetrie - úhel natočení pod  $M_B$  je roven nule:

$$\varphi_M = \frac{1}{EI} \int_0^{1100} (M_B - q \cdot \frac{x^2}{2}) dx = 0. \quad (79)$$

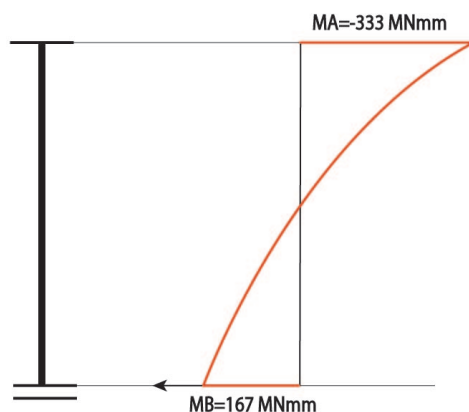
Po dosazení a zintegrování:

$$M_B = 1,67 \cdot 10^7 \text{ Nmm}. \quad (80)$$

Po dosazení do rovnice (77)

$$M_A = M_B - \frac{q \cdot l^2}{2} = 1,67 \cdot 10^8 - \frac{827 \cdot 1100^2}{2} = -3,33 \cdot 10^8 \text{ Nmm}. \quad (81)$$

Průběh momentů je na obrázku 53.



Obrázek 53: Průběh momentů při vetknutí.

Maxima tedy nastávají v reakcích. Globální maximum se nachází ve vetknutí, kde je i nejslabší průřez. Napětí by se v tomto místě pak rovnalo

$$\sigma_3 = \frac{M_A}{I_2} z_{max2}, \quad (82)$$

$$\sigma_3 = \frac{3,33 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} \cdot 173 = 288 \text{MPa.} \quad (83)$$

což je za statickou mezí kluzu, ale jak bylo uvedeno v podkapitole 1.1, nemusí vézt k poškození.

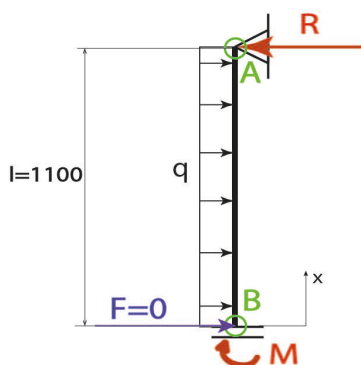
Ještě můžeme zjistit napětí pod momentem  $M_B$ :

$$\sigma_4 = \frac{M_B}{I_1} z_{max1}, \quad (84)$$

$$\sigma_4 = \frac{1,67 \cdot 10^8}{6,8 \cdot 10^8} \cdot 237 = 58 \text{MPa.} \quad (85)$$

### Průhyb nosníku

Hlavně pro porovnání s následným numerickým výpočtem nás zajímá i deformace - a to průhyb v místě B (obrázek 54). Aby bylo možno aplikovat Castiglianovu větu, musíme si v místě, ve kterém chceme zjistit průhyb, doplnit sílu. Síla musí být rovna nule, aby nezměnila stávající silové poměry. Průhyb určíme jen pro verzi s kloubem.



Obrázek 54: Nosník s vyznačenou pomocnou silou.

Sestavíme si obecnou rovnici momentu:

$$M(x) = M - F \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}, \quad (86)$$

rovnici rovnováhy k bodu A:

$$\Sigma M(A) = M - q \cdot \frac{l^2}{2} - F \cdot l = 0, \quad (87)$$

z rovnice rovnováhy si vyjádříme reakci  $M$  jako funkci síly  $F$ :

$$M = F \cdot l + q \cdot \frac{l^2}{2}, \quad (88)$$

zderivujeme obecnou rovnici momentu:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F} = l - x \quad (89)$$

a můžeme napsat vztah pro výpočet průhybu dle vztahu (10):

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^{1100} (M - q \cdot \frac{x^2}{2})(l - x)dx, \quad (90)$$

kde  $E$  je modul pružnosti, pro ocel  $2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$ ,  $I$  je moment setrvačnosti průřezu, vypočtený výše (rovnice (67)),  $M$  je reakce také vypočtená výše (rovnice (51) a (52)).

Po dosazení  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$ ,  $I = 6,8 \cdot 10^8 \text{mm}^4$ ,  $M = -1,263 \cdot 10^8 \text{Nmm}$ ,  $l = 1100 \text{mm}$ ,  $q = 827 \text{N/mm}$  a zintegrování získáme výsledek

$$w = 0,89 \text{mm}.$$

### 4.3 Rám

Jak bylo zmíněno v kapitole 2, rám bude namáhán na krut a to dle schéma z obrázku 10, který zde bude uveden ještě jednou (obrázek 55).

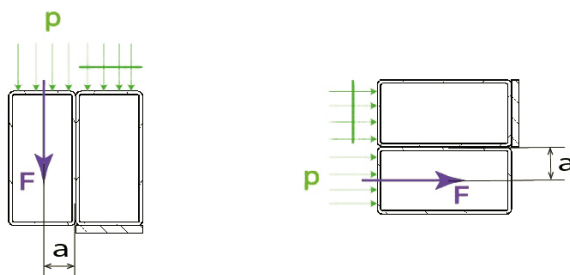
Průřez rámu je složen ze dvou profilů TROBD 300x150x8 stejně jako profily příčky, znovu zde uvedeme rozměry (tentokrát i s poloměrem zaoblení, které bude mít význam) na obrázku 56.

Plocha, na kterou pak bude působit zátěžný tlak  $p$  je:

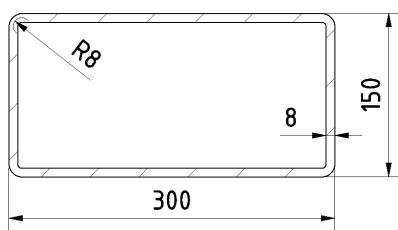
$$S = 150 \cdot l, \quad (91)$$

kde  $l$  je délka nosníku. Výslednou sílu od tlaku způsobujícího krut pak dostaneme vztahem:

$$F = p \cdot S = p \cdot 150 \cdot l. \quad (92)$$



Obrázek 55: Zatížení rámu.



Obrázek 56: Rozměry profilu; poloměr R8 je poloměrem střednice.

jelikož se jedná o tlak, budeme ho převádět opět na spojitě zatížení, pak:

$$q = \frac{p \cdot 150 \cdot l}{l}. \quad (93)$$

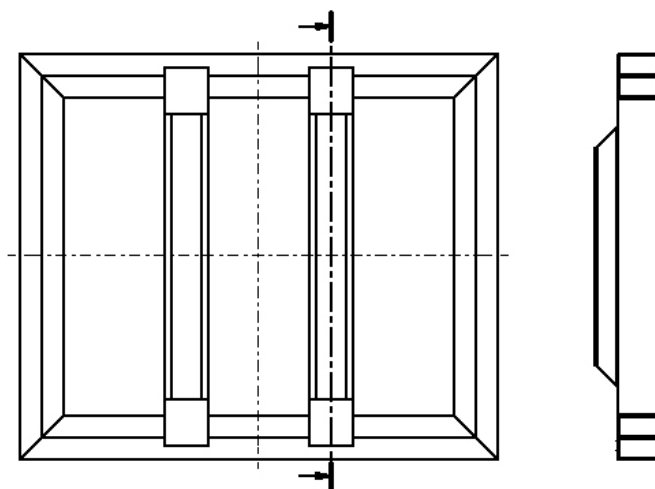
Nyní je třeba spojitě zatížení převést na spojitý kroutící moment. V našem případě bude dle obrázku 55 vzdálenost  $a = \frac{150}{2}$  mm. Šířka plochy, na kterou působí tlak je 150 mm a síla bude působit uprostřed.

Takže spojitý kroutící moment od tlaku (pro svislici i vodorovný svařenec, od sebe se liší pouze pootočením):

$$m_p = q \cdot a = p \cdot 150 \cdot 75 = 9338 \text{ N}. \quad (94)$$

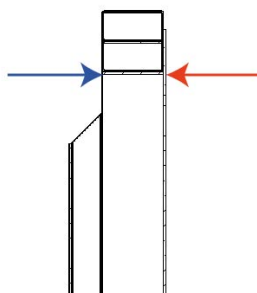
#### 4.3.1 Vazby mezi ostatními prvky

Vodorovný svařenec napojuje příčku. Rám funguje jako podpěra, do které se přenáší reakce z příčky. Vazba mezi příčkou a rámem je vyobrazena na obrázku 33, uveden ještě jednou (obrázek 57).



Obrázek 57: Řez znázorňující vazbu mezi rámem a příčkou.

Reakce pak vypadají následovně - viz obrázek 58.

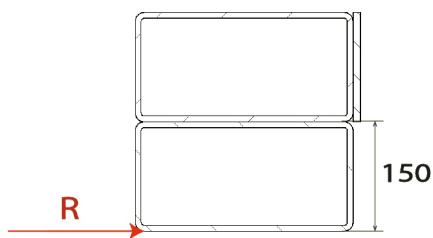


Obrázek 58: Detailní pohled z řezu křídla z obrázku 57, aplikovaná symetrie. Modrou šipkou označena reakce  $R$  příčky; ze zákona akce a reakce působí tato síla na rám stejnou velikostí a opačným směrem (červená šipka).

Reakce od příčky pak bude zatěžovat rám osamělým kroutícím momentem ve stejném smyslu co tlak. Hodnota kroutícího momentu se pak určí:

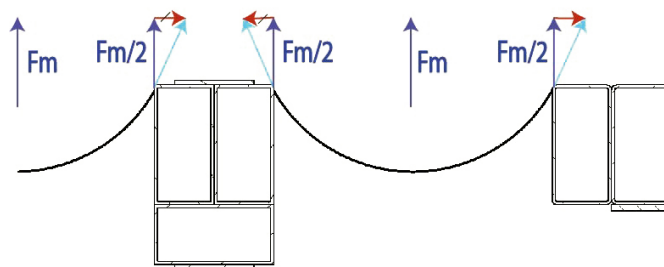
$$M_R = R \cdot 150 = 3,4 \cdot 10^5 \cdot 150 = 510 \cdot 10^5 \text{ Nmm}, \quad (95)$$

kde  $R$  je reakce příčky vypočtená z rovnice (48), tato síla působí na kraji profilu, což je od konce zachycení zárubní 150mm, proto působí na tomto rameni (obrázek 59).



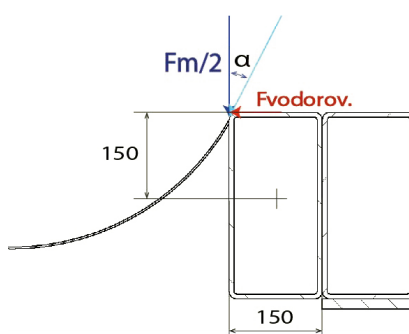
Obrázek 59: Detail působení reakce z příčky R na profil rámu.

Svislice je dále namáhána podobně jako příčka vazbou od membrány (obrázek 60).



Obrázek 60: Vazba mezi rámem a membránou, znázorněny reakce membrány.

Reakce rámu na zatížení membrány je pak na obrázku 61.



Obrázek 61: Reakce rámu na zatížení od membrány.

Vodorovnou složku celkové reakce (celková reakce je světle modrá šipka na obrázku 61) si můžeme přesunout dolů a síla bude zachována. Velikost síly  $\frac{F_m}{2}$  známe (rovnice (27) a (28),  $F_m = \sigma_m \frac{r}{R} l t^2$ ) z předchozích výpočtů, zbývá dopočítat velikost

vodorovné složky, která se zde na rozdíl od příčky nevykrátí a bude rám zatěžovat dalším momentem (ve stejném smyslu co tlak). Jelikož mezi touto složkou a známou silou  $F_m$  je taktéž známý úhel  $\alpha$  (rovnice (29),  $\cos \alpha = \frac{r(x)}{R}$ , kde  $r(x)$  je v našem případě horní poloměr, kde se membrána dotýká rámu, tzn. 348,5mm - z rovnice (46)), můžeme vodorovnou složku vypočíst dle goniometrické funkce:

$$\tan \alpha = \frac{F_{vodorov.}}{\frac{F_m}{2}}, \quad (96)$$

kde

$$\alpha = \arccos \frac{r}{R} = \arccos \frac{347}{403,2} = 29,8 \text{deg}, \quad (97)$$

takže

$$F_{vodorov.} = \frac{F_m}{2} \cdot \tan \alpha, \quad (98)$$

$$F_{vodorov.} = 0,29 F_m. \quad (99)$$

Síly od membrány opět působí po celé délce, takže si zatížení vyjádříme jako spojitě.

Nejprve spojitě síly od membrány:

$$q_{Fm/2} = \frac{\sigma_m \frac{r}{R} l t^2}{2l}, \quad (100)$$

$$q_{Fm/2} = 111 \cdot \frac{347}{403,2} 3 = 287 \text{N/mm}; \quad (101)$$

$$q_{Fvodorov.} = 0,29 \frac{F_m}{l}, \quad (102)$$

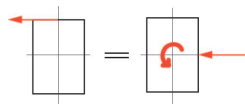
$$q_{Fvodorov.} = 0,29 \cdot \frac{\sigma_m \frac{r}{R} l t^2}{l}, \quad (103)$$

$$q_{Fvodorov.} = 0,29 \cdot 111 \cdot \frac{347}{403,2} \cdot 3 \cdot 2 = 166 \text{N/mm}. \quad (104)$$

Nyní spojitě momenty. Z obrázku 61 vidíme, že obě spojitá zatížení působí na rameni 150mm. Síla  $F_m$  od okraje průřezu do místa, kde začíná podepření zárubně



a síla  $F_{vodorov.}$  od okraje průřezu po střed profilu (těžiště). Sílu  $F_{vodorov.}$  si totiž můžeme (beze změny stávajících silových poměrů) přenést do těžiště s vytvořením krouticího momentu s ramenem rovným vzdálenosti původní polohy síly a těžiště (obrázek 62). Tím vznikne i přídavné namáhání na ohyb. K němu později.



Obrázek 62: Síla převedená na sílu s působištem v těžišti a kroutící moment.

Spojité kroutící moment od  $q_{Fm/2}$ :

$$m_{Fm/2} = q_{Fm/2} \cdot 150 = 287 \cdot 150 = 43050\text{N}, \quad (105)$$

spojitý kroutící moment od  $q_{Fvodorov.}$ :

$$m_{Fvodorov.} = q_{Fvodorov.} \cdot 150 = 166 \cdot 150 = 24900\text{N}. \quad (106)$$

#### 4.3.2 Celkové zatížení

Opět využijeme možnosti symetrie, takže budeme počítat pouze se čtvrtinou rámu. Schéma pak bude vypadat takto - obrázek 63. Jedná se o krut, takže podmínkou symetrie bude zachycení momentů, reakce jsou  $M_A$  a  $M_B$ . U tohoto lomeného nosníku si ještě pomůžeme vetknutím v bodě lomení (při krutu se do sebe nosníky zapřou), reakce  $M_C$  a  $M_D$ .

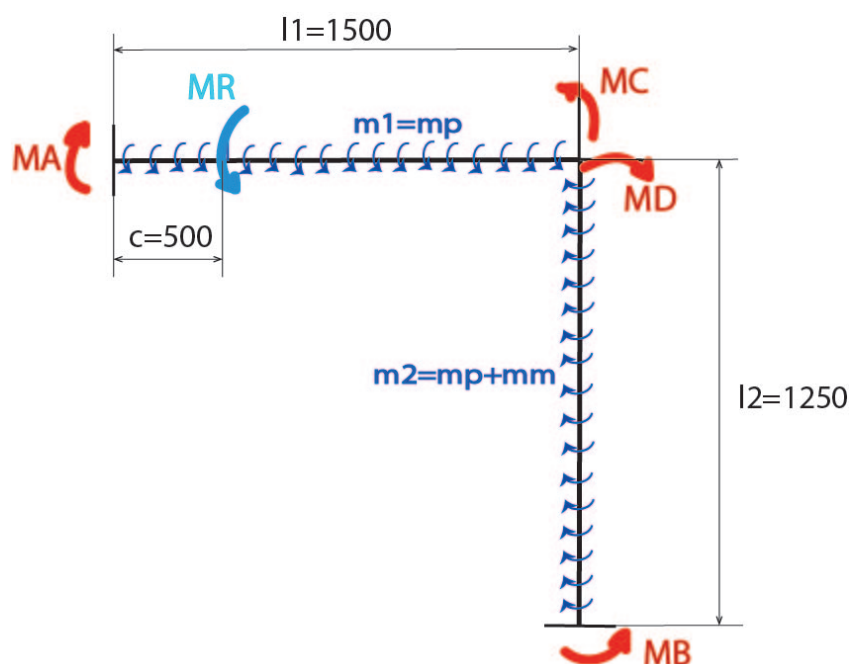
Na vodorovný nosník působí spojitý moment pouze od tlaku:

$$m_1 = m_p = 9338\text{N} \quad (107)$$

a k tomu osamělý moment od reakce příčky  $M_R = 510 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$ . Poloha tohoto momentu se nachází v místě odpovídajícímu středu příčky.

Na svislý nosník působí spojitý moment od tlaku a od membrány

$$m_2 = m_p + m_m = m_p + m_{Fm/2} + m_{Fvodorov.} = 9338 + 43050 + 24900 = 77288\text{N}. \quad (108)$$



Obrázek 63: Schéma zatížení rámu, rozměry nosníku lomeného jsou rozměry střednic dílčích nosníků.

Spojité momenty ale nepůsobí na celé délce nosníku dle obrázku 64 a to z toho důvodu, že ve skutečnosti působí až od poloviny šířky kvůli podepření zárubní. Nové délky si můžeme označit  $l_{11}$  pro spojitý moment  $m_1$  a  $l_{22}$  pro moment  $m_2$ .

Rovnice pro výpočet reakcí budou:

1. Rovnice rovnováhy pro vodorovný nosník - součet momentů k bodu lomení nosníku je roven nule:

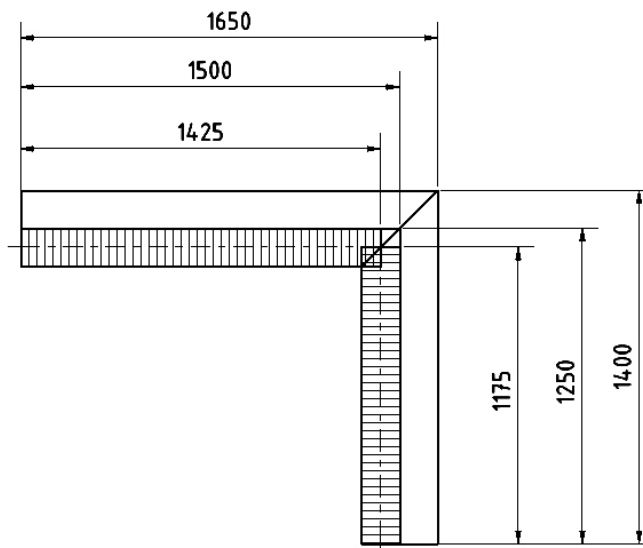
$$M_A - M_C - M_R - m_1 \cdot l_{11} = 0, \quad (109)$$

$$M_A - M_C = 63606000[\text{Nmm}]. \quad (110)$$

2. Rovnice rovnováhy pro svislý nosník - součet momentů k bodu lomení nosníku je roven nule:

$$M_B - M_D - m_2 \cdot l_{22} = 0, \quad (111)$$

$$M_B - M_D = 80867000[\text{Nmm}]. \quad (112)$$



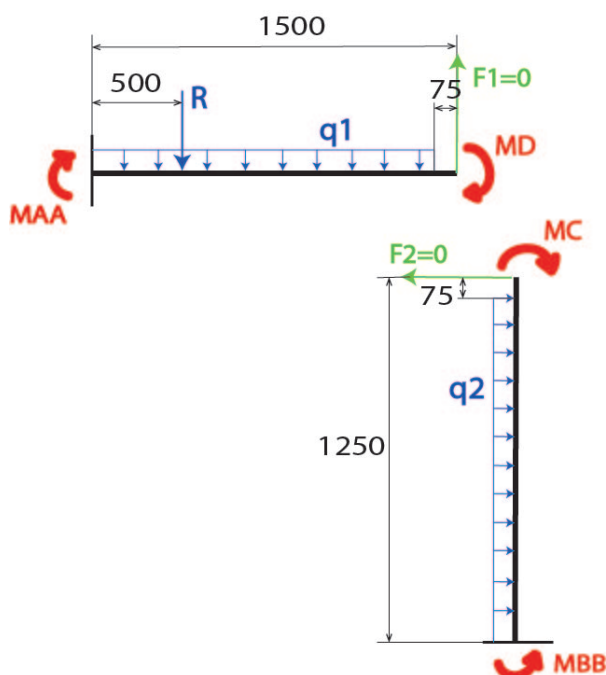
Obrázek 64: Rozměry rámu; vyšrafovaná oblast je oblast působení spojitých momentů.

3. Jelikož jsou nosníky spojeny, musí jejich deformace v místě spojení být stejná: Průhyby nosníků v bodě lomení se budou rovnat.

Kroutící moment působí v rovině kolmé na střednici nosníku. Pokud se nosníky napojují v pravém úhlu jako tady, pak kroutící moment jednoho nosníku musí přejít v tomto místě do ohybového momentu druhého nosníku, protože ohybový moment působí v rovině kolmé na průřez. Vypadat to bude následovně - obrázek 65.

Nosníky rozdělíme. V symetrických rovinách a v bodě lomení budou stále vetknuty. Místo spojení s druhým nosníkem bude reakční ohybový moment (kroutící moment z druhého nosníku). Dále budou nosníky nadále zatíženy silami od tlaku, příčky a membrány tak, jako kdyby v případě nepodepření zárubní vytvářely ohybový moment. V tomto případě se ale nebude jednat o momenty, nýbrž o spojitě síly. Hodnoty těchto sil jsou uvedeny výše:

- zatížení od tlaku - rovnice (93):  $q_p = 0,83 \cdot 150 = 125 \text{ N/mm}$ ,
- reakce příčky - rovnice (50):  $R = 3,4 \cdot 10^5 \text{ N}$ ,
- zatížení od membrány - rovnice (100):  $q_{Fm/2} = 287 \text{ N/mm}$ .



Obrázek 65: Nosníky zatížené ohybovým momentem. Ve vetknutí jakožto podmínce symetrie jsou reakční ohybové momenty  $M_{AA}$  a  $M_{BB}$ , aby se odlišily od reakcí pro krut.

Vodorovný nosník tedy bude zatížen silou  $R = 3,4 \cdot 10^5 \text{ N}$ , spojitým zatížením od tlaku  $q_1 = q_p = 125 \text{ N/mm}$  a na konci bude působit ohybový moment  $M_C$ .

Svislý nosník bude zatížen spojitým zatížením od tlaku a membrány  $q_2 = q_p + q_{Fm/2} = 412 \text{ N/mm}$

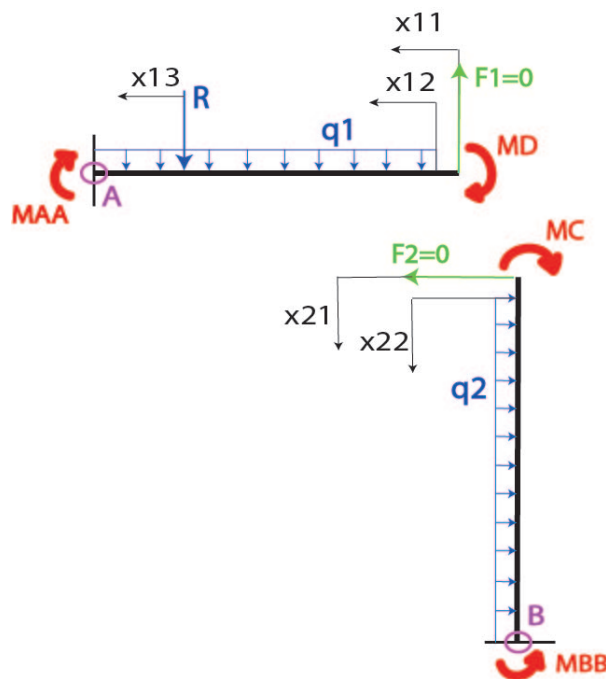
Dále si musíme doplnit sílu, pod kterou budeme počítat průhyb a položit ji rovnu nule (obrázek 66).

Nyní rozdělíme nosníky na intervaly a pro každý vyjádříme ohybový moment (obrázek 66).

Pro vodorovný nosník:

- $x_{11} \in [0; 75]$ ,

$$M(x_{11}) = -M_D + F_1 \cdot x_{11}, \quad (113)$$



Obrázek 66: Nosníky zatížené ohybovým momentem rozdělené na intervaly dle změn zatížení.

- $x_{12} \in < 0; 925 >$ ,

$$M(x_{12}) = -M_D + F_1 \cdot (75 + x_{12}) - q_1 \frac{x_{12}^2}{2}, \quad (114)$$

- $x_{13} \in < 0; 500 >$ ,

$$M(x_{13}) = -M_D + F_1 \cdot (1000 + x_{13}) - q_1 \frac{(925 + x_{13})^2}{2} - R \cdot x_{13}. \quad (115)$$

$M_D$  je reakce, takže si ji musíme vyjádřit jako funkci síly  $F$ , tomu nám pomůže momentová rovnice rovnováhy k bodu A:

$$\Sigma M(A) = -M_D - R \cdot 500 + F_1 \cdot 1500 - q_1 \cdot 1425 - M_{AA} = 0, \quad (116)$$

$$M_D = -R \cdot 500 + F_1 \cdot 1500 - q_1 \cdot 1425 - M_{AA}. \quad (117)$$

Derivace momentů dle síly:

- 

$$\frac{\partial M(x_{11})}{\partial F_1} = -1500 + x_{11}, \quad (118)$$

•

$$\frac{\partial M(x_{12})}{\partial F_1} = -1500 + (75 + x_{12}), \quad (119)$$

•

$$\frac{\partial M(x_{13})}{\partial F_1} = -1500 + (1000 + x_{13}). \quad (120)$$

Pro svislý nosník:

•  $x_{21} \in < 0; 75 >$ ,

$$M(x_{21}) = -M_C + F_2 \cdot x_{21}, \quad (121)$$

•  $x_{22} \in < 0; 1175 >$ ,

$$M(x_{22}) = -M_C + F_2 \cdot (75 + x_{22}) - q_2 \frac{x_{22}^2}{2}. \quad (122)$$

$M_C$  je reakce, takže si ji musíme vyjádřit jako funkci síly  $F$ , tomu nám pomůže momentová rovnice rovnováhy k bodu B:

$$\Sigma M(B) = -M_C + F_2 \cdot 1250 - q_2 \cdot 1175 + M_{BB} = 0, \quad (123)$$

$$M_C = F_2 \cdot 1250 - q_2 \cdot 1175 + M_{BB}. \quad (124)$$

Derivace momentů dle síly:

•

$$\frac{\partial M(x_{21})}{\partial F_2} = -1250 + x_{21}, \quad (125)$$

•

$$\frac{\partial M(x_{22})}{\partial F_2} = -1250 + (75 + x_{22}) = -1175 + x_{22}. \quad (126)$$

Nyní můžeme zapsat podmínku  $w_1 = w_2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \cdot \left[ \int_0^{75} (-M_D)(-1500 + x_{11})dx_{11} + \int_0^{925} (-M_D - q_1 \cdot \frac{x_{12}^2}{2})(-1425 + x_{12})dx_{12} + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{500} (-M_D - q_1 \cdot \frac{(925 + x_{13})^2}{2} - R \cdot x_{13})(-500 + x_{13})dx_{13} \right] = \\ & = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \int_0^{75} (-M_C)(-1250 + x_{21})dx_{21} + \int_0^{1175} (-M_C - q_2 \cdot \frac{x_{22}^2}{2}) \cdot (-1175 + x_{22})dx_{22} \right]. \end{aligned} \quad (127)$$

Členy  $\frac{1}{EI}$  se vykrátí, po dosazení za  $R = 3,4 \cdot 10^5 \text{N}$ ,  $q_1 = q_p = 125 \text{N/mm}$ ,  $q_2 = q_p + q_{Fm/2} = 412 \text{N/mm}$  a zintegrování dostaneme

$$-5 \cdot 10^5 M_C = 2,4 \cdot 10^{13} [\text{Nmm}]. \quad (128)$$

4. Druhá deformační podmínka: Úhly natočení v bodě lomení se budou rovnat.

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (129)$$

V případě kroucení nekruhových průřezů se úhel natočení  $\varphi$  spočte:

$$\varphi = \vartheta l, \quad (130)$$

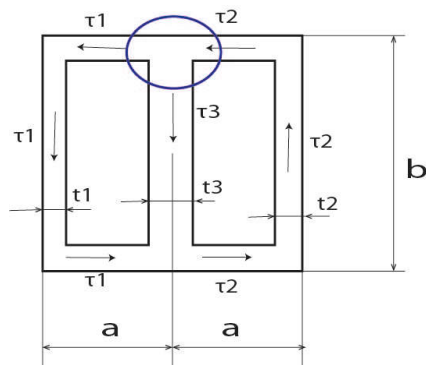
kde  $\vartheta$  je poměrný úhel zkrutu na 1 m délky. Zjistíme ho během výpočtu vztahu mezi smykovým napětím  $\tau$  a kroutícím momentem  $M_k$ .

Průřez nosníku se skládá ze svařených profilů. Můžeme je tedy uvažovat jako jeden celek. Pak jako první závislosti můžeme využít hydrodynamickou analogii - obrázek 67. Obrysy jsou považovány za smykové čáry a mezi nimi „proudí“ smykové napětí. Pro začátek zanedbáme zaoblení profilů a vrátíme se k němu později.

Tloušťka stěn profilů je  $t_1$  a  $t_2$  a rovná se 8mm (vzdálenost mezi smykovými čarami), uprostřed se stýkají dvě stěny, tak tloušťka  $t_3$  je 16mm. Rozměry profilů jsou  $a=150\text{mm}$ ,  $b=300\text{mm}$ .

Z hydrodynamické analogie tedy:

$$\tau_2 \cdot t_2 = \tau_1 \cdot t_1 + \tau_3 \cdot t_3. \quad (131)$$



Obrázek 67: Hydrodynamická analogie.

Dále aplikujeme Stokesovu větu (18) pro střednice:

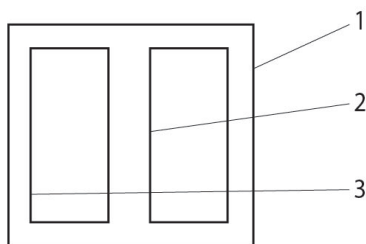
$$\tau_{s1}a + \tau_{s1}b + \tau_{s1}a - \tau_{s3}b = 2G\vartheta ab \quad (132)$$

$$\tau_{s2}a + \tau_{s2}b + \tau_{s2}a + \tau_{s3}b = 2G\vartheta ab, \quad (133)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku, pro ocel  $G=80770\text{MPa}$ . Rovnice (131) samozřejmě platí i pro střednice.

Poslední vztah, který budeme potřebovat, nám udává objem Prandtlova vrchlíku.

Průřez se skládá ze 3 obrysových čar (obrázek 68). Každé čáře odpovídá Pran-



Obrázek 68: Obrysové čáry průřezu.

dlova funkce s konstantní hodnotou  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . Na obrysu si zvolíme  $\Phi_1 = 0$  a objem Prandtlova vrchlíku bude závislý na geometrii průřezu a na hodnotách  $\Phi_2$  a  $\Phi_3$ . Rovnice pro kroutící moment pak bude vypadat takto:

$$M_k = 2V_\Phi \dot{\Phi} [ \Phi_2 ab + \Phi_3 ab ], \quad (134)$$



kde přibližnost je z důvodu zjednodušeného výpočtu objemu  $V_\Phi$ , protože zanedbáváme nelineární rozložení funkcí mezi obrysy.

Pro střední hodnoty smykových napětí můžeme dále psát:

$$\tau_{s1} = \frac{\Phi_3}{t_1} \rightarrow \Phi_3 = \tau_{s1} t_1 \quad (135)$$

$$\tau_{s2} = \frac{\Phi_2}{t_2} \rightarrow \Phi_2 = \tau_{s2} t_2. \quad (136)$$

Když rovnice (135) a (136) dosadíme do (134), získáme:

$$M_k = 2[\tau_{s2} t_2 ab + \tau_{s1} t_1 ab]. \quad (137)$$

Nyní máme 4 rovnice (131), (132), (133), (137) o 4 neznámých  $\tau_{s1}$ ,  $\tau_{s2}$ ,  $\tau_{s3}$ ,  $\vartheta$ .

Pokud budeme dosazovat v základních jednotkách (METRY), z řešení rovnic (131), (132), (133) nám vyplyne:

$$\tau_{s1} = \tau_{s2} = 1,121 \cdot 10^{10} \vartheta, \quad (138)$$

$$\tau_{s3} = 0. \quad (139)$$

A pokud dosadíme do rovnice (137), dostaneme:

$$M_k = 2ab[1,121 \cdot 10^{10} \vartheta + 1,121 \cdot 10^{10} \vartheta] = 2,0178 \cdot 10^9 \vartheta \quad (140)$$

a z toho

$$\vartheta = 0,5 \cdot 10^{-9} M_k. \quad (141)$$

Nyní se vraťme k rovnicím (129) a (130).

Úhel natočení se, v případě, že dochází po délce nosníku ke změně zatížení, vypočte jako součet úhlů natočení jednotlivých částí, které vzniknou rozdělením dle změn zatížení. Takže pro vodorovný nosník bude dle obrázku 63 platit (pro úhel natočení v bodě lomení pro délky):

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot (M_A - m_1 \cdot 0,5) \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot (M_A - m_1 \cdot 0,5 - M_R - m_1 \cdot 0,925) \cdot 0,925 + \\ & + 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot (M_A - m_1 \cdot 0,5 - M_R - m_1 \cdot 0,925) \cdot 0,075, \quad (142) \end{aligned}$$

kde vzdálenosti jsou v základních jednotkách, ve kterých budeme dosazovat i nadále; vzdálenosti 0,925m a 0,075m plynou z obrázku 64.

Pro svislý nosník:

$$\varphi_2 = 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot (M_B - m_2 \cdot 1,175) \cdot 1,175 + 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot (M_B - m_2 \cdot 1,175) \cdot 0,075, \quad (143)$$

přičemž platí totéž co pro rovnici (142).

Soustavou rovnic (129), (142), (143) pak získáme:

$$1,35M_A - 1,1M_B = 213097[\text{Nm}]. \quad (144)$$

Řešením soustavy rovnic (110), (112), (128), (144) dostaneme reakce:

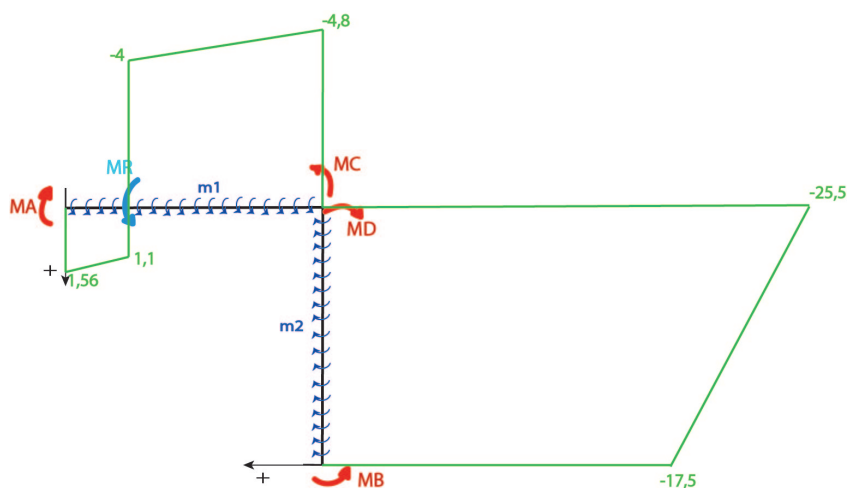
$$M_A = 1,56 \cdot 10^4 \text{ Nm},$$

$$M_B = -1,75 \cdot 10^5 \text{ Nm},$$

$$M_C = -4,8 \cdot 10^5 \text{ Nm},$$

$$M_D = -2,55 \cdot 10^5 \text{ Nm}.$$

Průběh kroutících momentů pak bude vypadat následovně - obrázek 69.



Obrázek 69: Průběh kroutícího momentu, čísla v jednotkách  $10^4 \text{ Nm}$ .

Maximální kroutící moment je  $2,55 \cdot 10^5 \text{ Nm}$ . Nejvyšší střední napětí je z rovnice (138)  $\tau_{s1} = \tau_{s2} = 1,121 \cdot 10^{10} \vartheta$ , kde z rovnice (141)  $\vartheta = 0,5 \cdot 10^{-9} M_k$ , takže maximální

střední napětí:

$$\tau_{smax} = 1,121 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} M_k = 1,121 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} 2,55 \cdot 10^5 = 1,4 \text{MPa}. \quad (145)$$

$\vartheta$  je deformace na 1m, proto dosazujeme v základních jednotkách.

Maximální smykové napětí se vypočte:

$$\tau_{max} = \tau_{smax} + G\vartheta t = 1,4 \cdot 10^6 + 80770 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} 2,55 \cdot 10^5 \cdot 0,008, \quad (146)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku, pro ocel  $G=80770\text{MPa}$ ,  $t$  je vzdálenost smykových čar,  $t=0,008\text{m}$ ,

$$\tau_{max} = 1,4 \cdot 10^6 + 80770 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} 2,55 \cdot 10^5 \cdot 0,008 = 1,4 \text{MPa}. \quad (147)$$

Ještě je třeba zkontrolovat kroutící moment v zaoblené části profilu. Obecné řešení Stokesovy rovnice pro zakřivený element (20):

$$\tau_R = \frac{C_2}{R} + G\vartheta R, \quad (148)$$

kde  $C_2$  je integrační konstanta, kterou zjistíme ze smykového toku, který musí mít stejnou velikost v přímé i zakřivené části.

$$Q_\tau = \tau_s b = \int_{R_1}^{R_1+b} \tau_{(R)} dR = \int_{R_1}^{R_1+b} \frac{C_2}{R} + G\vartheta R dR \quad (149)$$

a odtud získáme

$$C_2 = \frac{\tau_s b - \frac{G\vartheta}{2} [(R_1 + b)^2 - R_1^2]}{\ln[\frac{R_1+b}{R_1}]}, \quad (150)$$

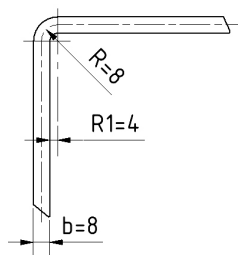
kde všechny veličiny jsou znázorněny na obrázku 70.

Nejprve spočítáme napjatost ve střednici (obrázek 71).

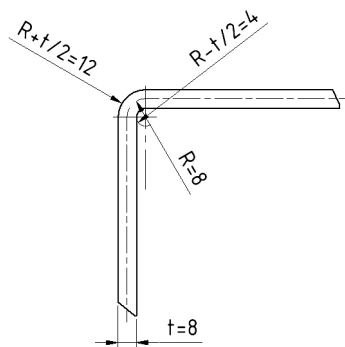
$$C_2 = \frac{1,4 \cdot 10^6 0,008 - \frac{80770 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 2,55 \cdot 10^5}{2} [(0,004 + 0,008)^2 - 0,004^2]}{\ln[\frac{0,004+0,008}{0,004}]}, \quad (151)$$

$$C_2 = 12,1 \text{N/mm}, \quad (152)$$

$$\tau_R = \frac{12,1 \cdot 10^3}{0,008} + 80770 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 2,55 \cdot 0,008 = 1,5 \text{MPa}, \quad (153)$$



Obrázek 70: Znázornění veličin k rovnici (149).



Obrázek 71: Poloměry, na kterých kontrolujeme napjatost.

dosazeno v základních jednotkách.

Dále je třeba dopočíst napjatost na vnějším a vnitřním zaoblení. Hodnota konstanty  $C_2$  zůstává.

$$\tau_{R+t/2} = \frac{12,1 \cdot 10^3}{0,012} + 80770 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 2,55 \cdot 0,012 = 1\text{MPa}, \quad (154)$$

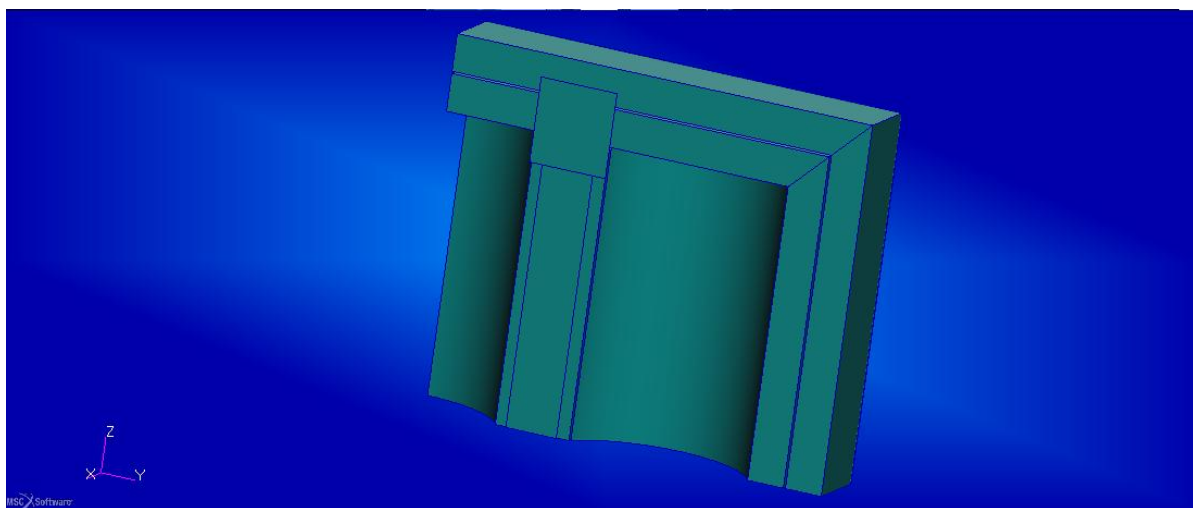
$$\tau_{R-t/2} = \frac{12,1 \cdot 10^3}{0,004} + 80770 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 2,55 \cdot 0,004 = 3\text{MPa}. \quad (155)$$

Největší napjatost je na vnitřním poloměru, ale stále 3 MPa, což je pro materiál ocel 11 373, který má minimální mez kluzu 187 MPa, zanedbatelné.

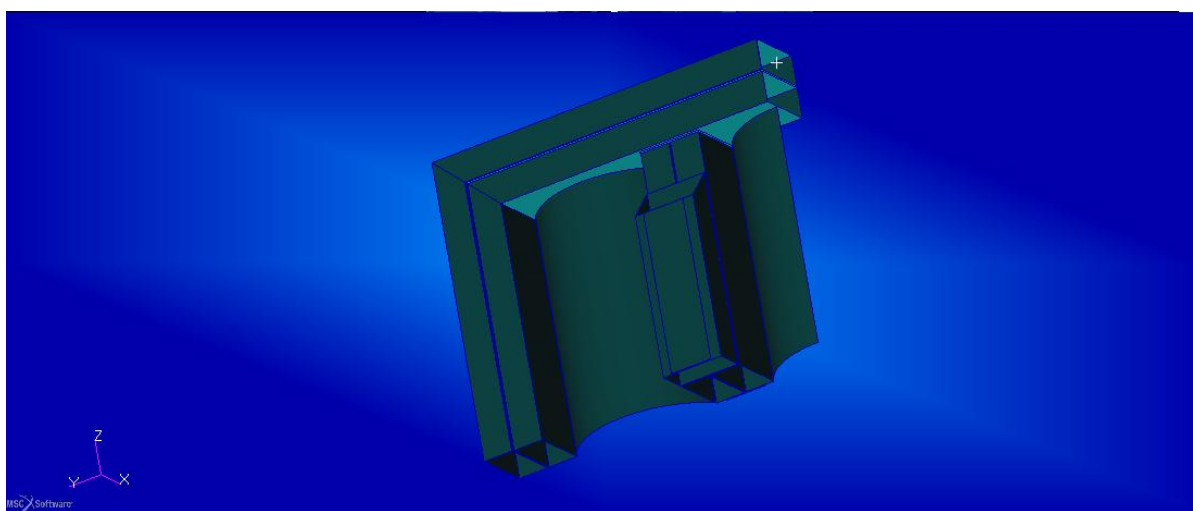
Vraťme se k síle od vodorovné složky vazby membrány, která namáhá svislici na ohyb. Vzhledem k zanedbatelným hodnotám smykového napětí předpokládáme, že napětí, které by vyplynulo z ohybu, by bylo taktéž zanedbatelné. Takže výpočet neprovedeme.

## 5 Numerický výpočet

Celá konstrukce je složena z tenkostěnných profilů - tloušťka stěn je velmi malá vzhledem k ostatním rozměrům. Z toho vyplývá, že můžeme využít skořepinové prvky (dle terminologie Nastranu Shell). To znamená, že všechny stěny převedeme do 2D ploch. Při využití symetrie pak model vypadá takto: obrázky 72 a 73.



Obrázek 72: Model, pohled zepředu.



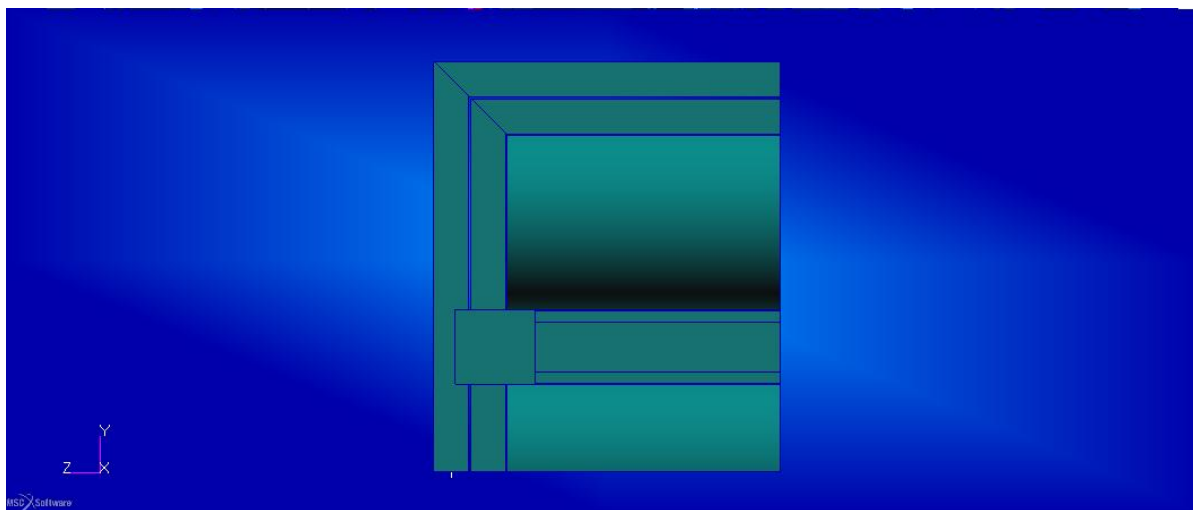
Obrázek 73: Model, pohled zezadu.

Rám je vymodelován bez zaoblení, z analytického výpočtu sice vyplynulo, že právě tady je největší namáhání, ale také vyplynulo, že je zanedbatelné, takže nebudeme dělat úlohu zbytečně složitou.

Příčka bude namáhána ohybem, zahrnutí zaoblení profilů je taktéž zbytečné.

## 5.1 Okrajové podmínky

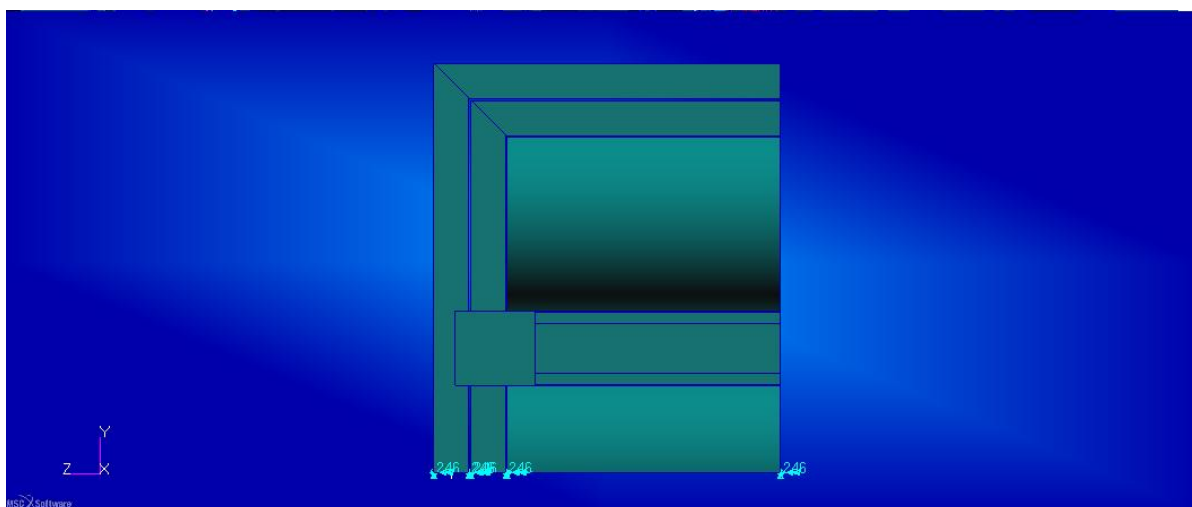
Nejprve je třeba podchytit symetrii. Souřadný systém křídla je na obrázku 74. Musíme zajistit, aby se křídlo neposouvalo v ose  $y$ . Jelikož se jedná o skořepinu, musíme zamezit i rotacím kolem os  $x$  a  $z$ . Tato okrajová podmínka je na obrázku 75. Totéž platí pro posuv v ose  $z$ , potažmo natočení kolem os  $x$  a  $y$ , obrázek 76.



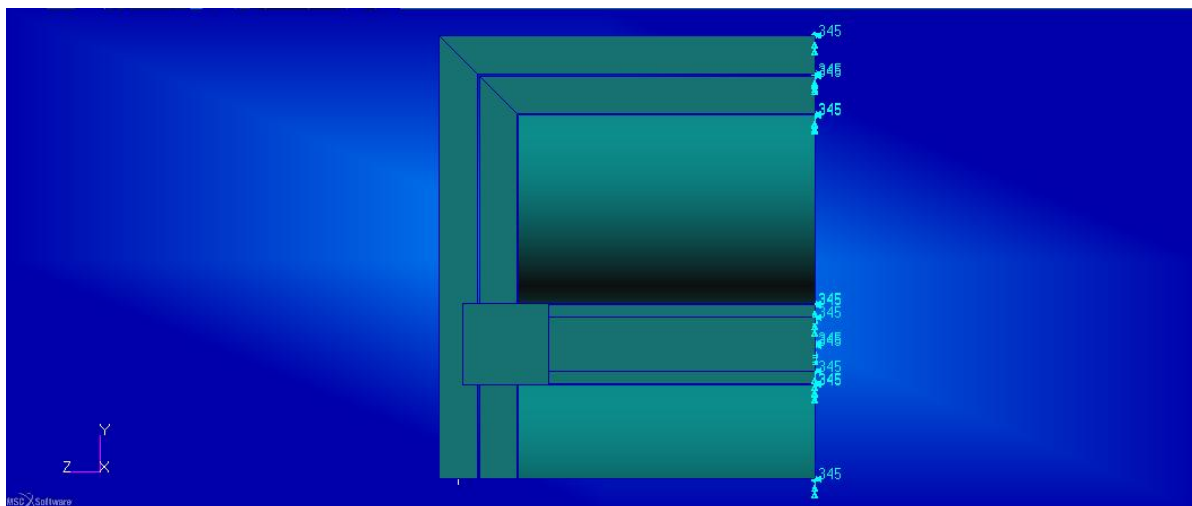
Obrázek 74: Souřadný systém křídla.

Další je opření křídla o zárubeň. Zárubeň má, jako každý rám pro zasazení dveří, zaoblení. V rámci tohoto zjednodušeného výpočtu bychom ho mohli vynechat, bude ale pro větší stabilitu modelu ponecháno. V případě vypuštění zaoblení by se rám lámal přes hranu, v případě se zaoblením sklouzne.

Zárubeň zde bude mít funkci pouze okrajové podmínky, její stav nezkoumáme, takže bude považována za těleso nedeformovatelné (dle terminologie Natran Rigid



Obrázek 75: Symetrie podle osy z.

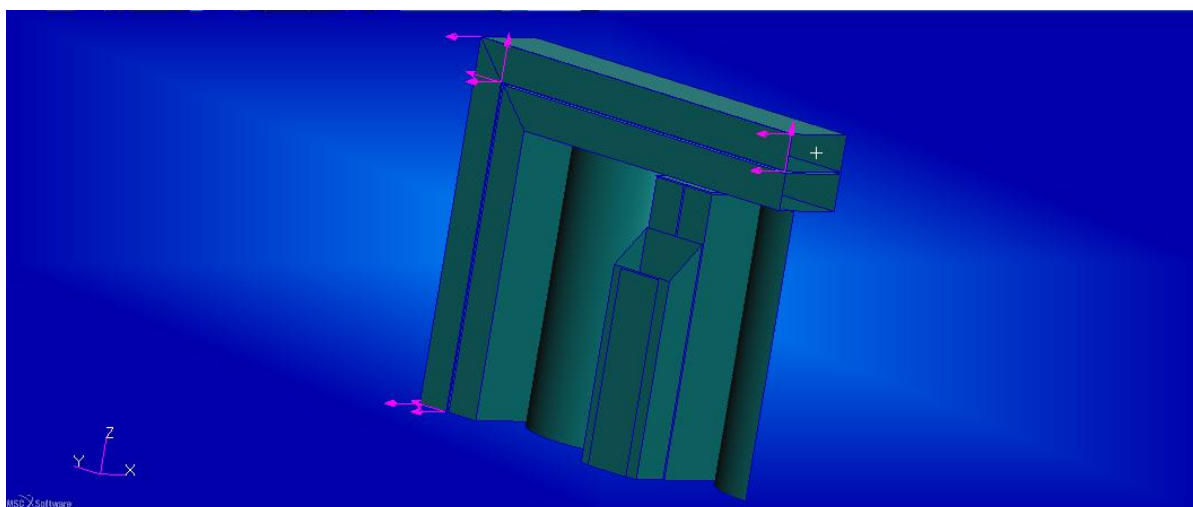


Obrázek 76: Symetrie podle osy y.

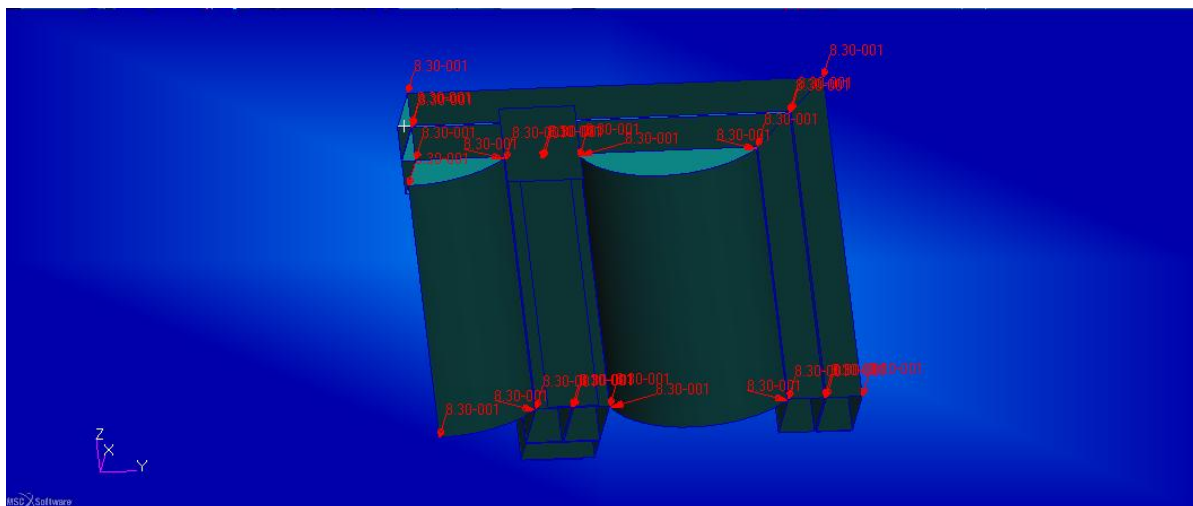
body, dále jen Rigid). Po zadání se nám na Rigid tělese zobrazí šipky, které musí směřovat od deformovatelného tělesa (tedy v tomto případě křídla), obrázek 77.

## 5.2 Zatížení

Tlak nadefinujeme na všechny plochy, obrázek 78.



Obrázek 77: Zárubeň jako nedeformovatelné těleso.



Obrázek 78: Zatížení.

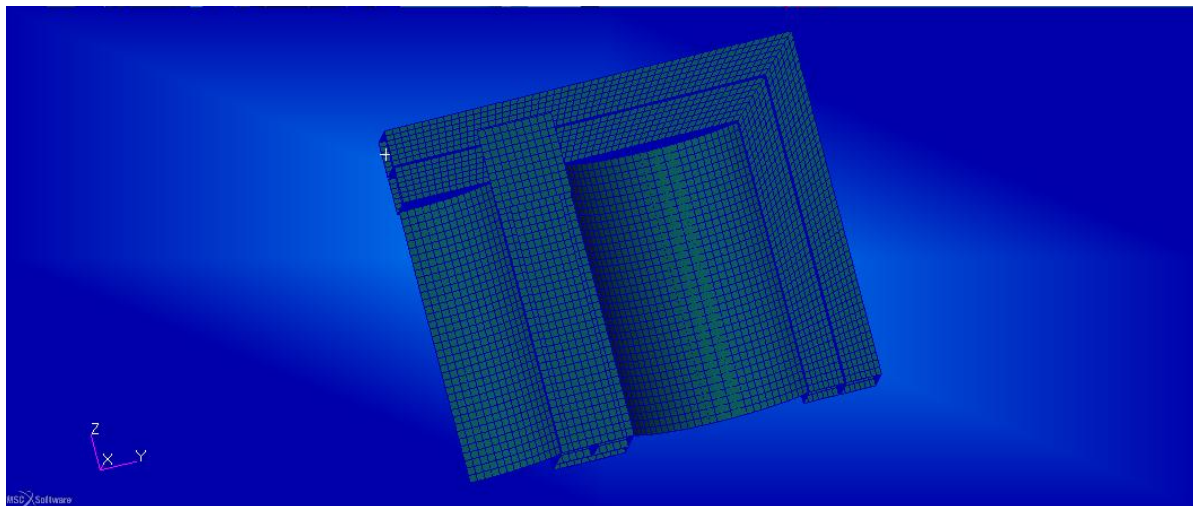
### 5.3 Sít'

Díky zjednodušením - symetrii a převodu na skořepinu bude model obsahovat podstatně nižší počet elementů. Jen díky symetrii jich bude 4x méně, k tomu nastává další úspora elementů díky převodu na skořepinu, což určitě oceníme při výpočtovém čase.

Všechny plochy jsou biparametrické, tzn. jsou ohraničeny maximálně 4 křivkami (v tomto případě dokonce přímkami), takže můžeme použít síťování IsoMesh,



které dává nejlepší síť, ale je použitelné pouze na tento typ ploch. Velikost elementů zvolíme přiměřenou, aby nebyly moc velké - tím bychom získali nepřesné výsledky a aby nebyly moc malé - pouze by prodlužovaly výpočet a lepší výsledek bychom nedostali. Zvolená síť je na obrázku 79.



Obrázek 79: Síť, 12 343 uzlů, 11 946 elementů.

## 5.4 Kontakty

Jelikož se křídlo skládá z více částí, je třeba mezi prvky definovat kontakty.

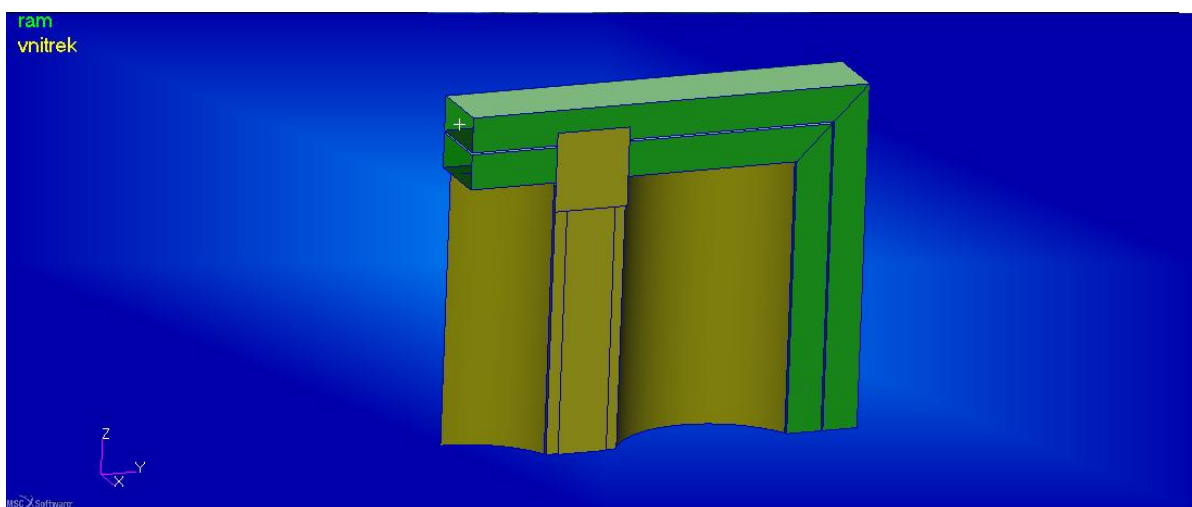
Nejprve ale musíme určit kontaktní tělesa a jejich vlastnosti.

Kontaktním tělesem může být jak jedna komponenta, tak více komponent, mezi kterými se pak nastaví jejich vlastní kontakt (viz dále).

Tělesa mohou být nedeformovatelná (jako zárubeň výše) a deformovatelná (Deformable body). Protože chceme znát napjatost v celém křídle, všechny komponenty označíme jako deformovatelné.

Jedním kontaktním tělesem je rám a druhým příčka, spojovací plech a membrána, což je zbytek křídla. Znázorněno na obrázku 80.

Těsně před zahájením výpočtu pak musíme definovat kontakty mezi tělesy, k tomu slouží kontaktní tabulka, obrázek 81. V tabulce jsou všechna kontaktní tělesa.



Obrázek 80: Deformovatelná kontaktní tělesa - žlutě vnitřek (tedy příčka, plech a membrána) a zeleně rám.

Zárubeň je zde 2x, protože Rigid těleso musí mít směr od deformovatelného a z důvodu jiné orientace ploch bylo třeba směr určit pokaždé na jinou stranu.

Contact Table						
Parameters Defining Contact Between Bodies			Global Contact Detection: Default(by body #)			
<input type="checkbox"/> View Table Only						
<input type="button" value="Touch All"/> <input type="button" value="Glue All"/> <input type="button" value="Deactivate All"/> <input type="button" value="Import/Export"/> <input type="button" value="Select Existing"/>						
Contact Matrix						
	Body Type	Release	1	2	3	4
1-ram	Deformable	N	G	G	T	T
2-vnitrek	Deformable	N	G	G		
3-zaruben	Rigid	N	T			
4-zaruben2	Rigid	N	T			

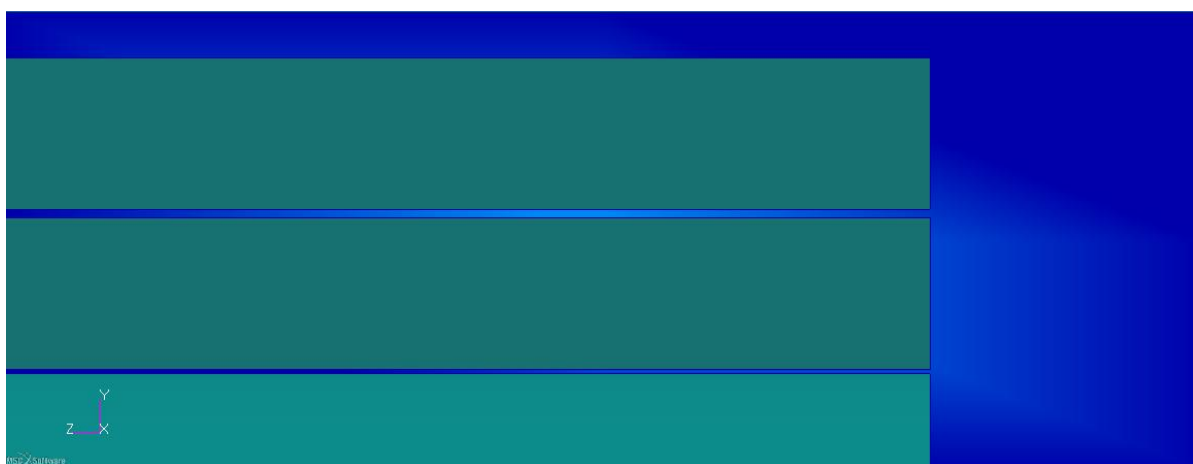
Obrázek 81: Tabulka kontaktů.

Objevují se zde dva typy kontaktů:

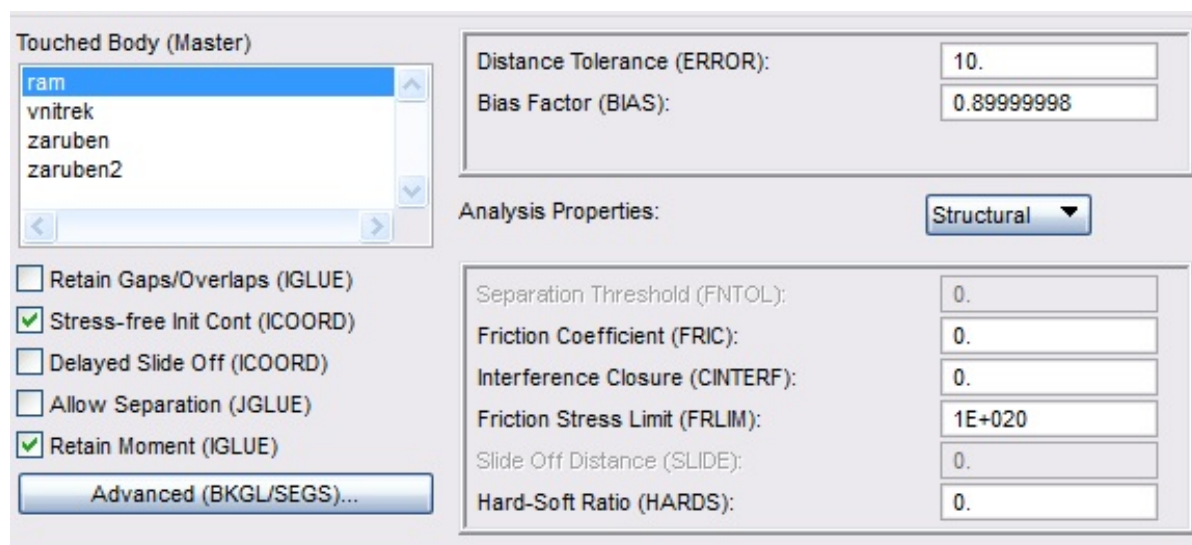
- G - Glue - což je zjednodušeně přivaření součástí k sobě (dále jen Glue),
- T - Touch - což je dotek součástí (dále jen Touch).

Rám, jako jedno kontaktní těleso je svařenec, takže mezi jednotlivými částmi je Glue. Totéž platí pro druhé deformovatelné těleso. Rám se zbytkem je taky svařen, takže kontakt Glue bude i zde. Rám se o zárubeň jen opírá, takže kontaktem je Touch.

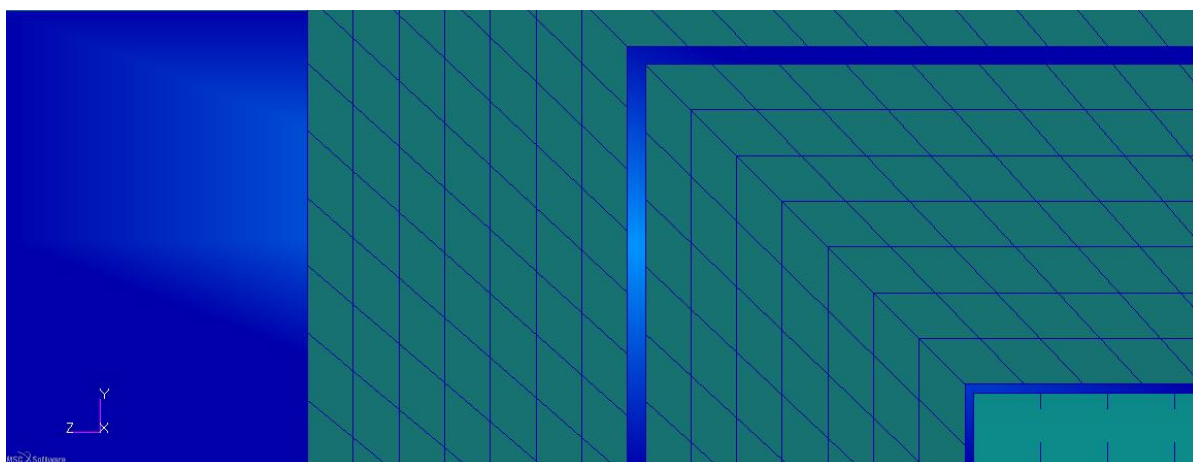
Další, na co musíme myslet při zadávání kontaktů, je, že se jedná o skořepiny a jejich plochy v modelu jsou střednice, které jsou od sebe vzdálené tak, aby se pak dotýkaly jejich skutečné tloušťky (obrázek 82), takže je třeba nastavit toleranci pro vyhledávání kontaktního tělesa (obrázek 83). Kontakty jsou dále mezi uzly, tzn., že pokud síť mezi tělesy vypadá jako na obrázku 84, pak skutečná vzdálenost uzlů je větší, než vzdálenost ploch, proto je třeba toleranci nastavit na větší číslo, jinak ke kontaktu, ač je nadefinován, nedojde, protože se tělesa v určené vzdálenosti nenajdou.



Obrázek 82: Vzdálenost ploch skořepin.



Obrázek 83: Nastavení kontaktů.



Obrázek 84: Vzdálenost uzlů.

Jako poslední je třeba v nastavení zadat, že z kontaktů nevychází počáteční napětí před zatížením a jelikož se jedná o skořepiny, musíme zachytit i momenty pro kontakty Glue, obrázek 83.

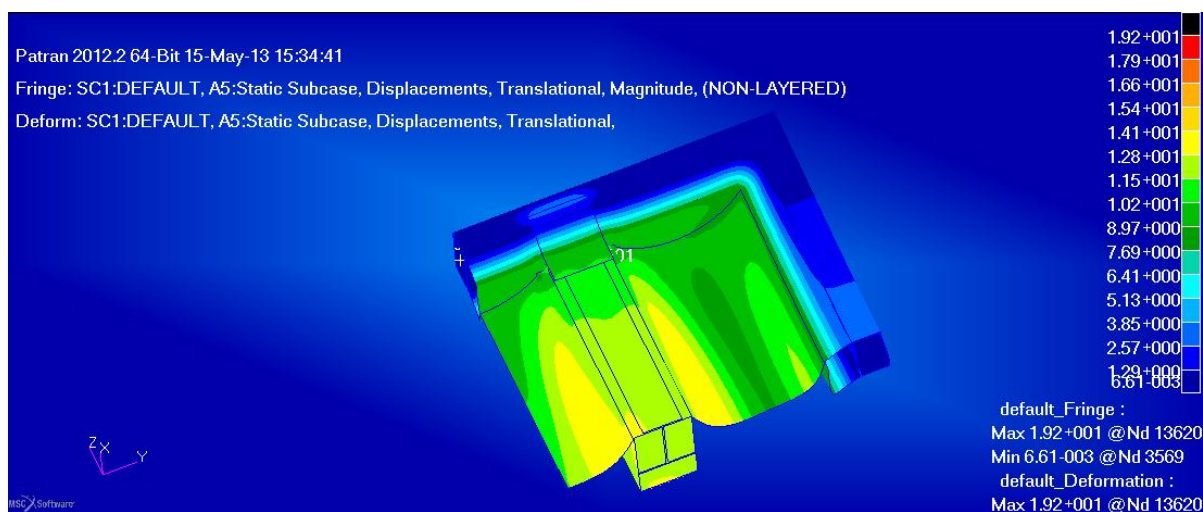
## 5.5 Výsledky

### 5.5.1 Posuvy

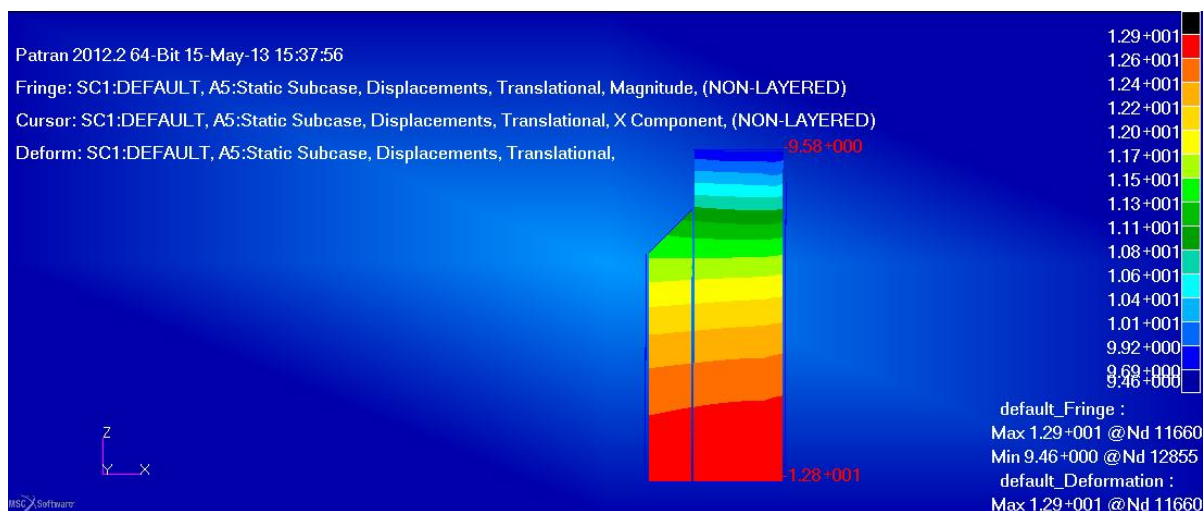
Jako první zkontrolujeme deformace, obrázek 85. Model se chová dle očekávání. Ukazuje nám však, že jsme za oblastí lineární elasticity - dochází k velkým posuvům. Pro porovnání byl použit i nelineární řešič (Solver 400), udával ale téměř stejné výsledky.

### 5.5.2 Průhyb příčky

Nyní zjistíme průhyb příčky. Posuv nám sice ukazuje zhruba 14mm, ale jednak to je posuv obecně v prostoru, ne ve směru průhybu a jednak je ovlivněn posuvem rámu, na který se upíná. Skutečný průhyb pak zjistíme podle obrázku 86. Zobrazíme si posuv uzlů na koncích nosníku v ose x. Horní posuv je 9,58mm a dolní 12,8mm. V rozdílu to dělá průhyb příčky 3,22mm.



Obrázek 85: Posuvy.



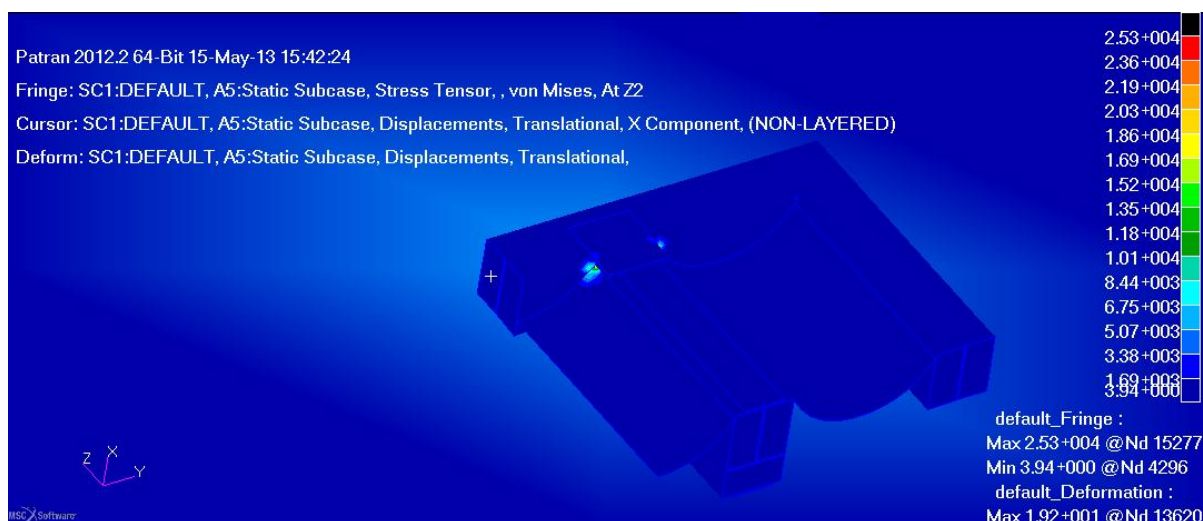
Obrázek 86: Průhyb.

### 5.5.3 Napětí

Zobrazíme si průběh napětí, obrázek 87. Vidíme na příčce v kontaktu s rámem špičky velmi vysoké hodnoty. Přiblížíme si to, obrázek 88.

Výsledné hodnoty napětí byly získány z lineárního modelu, výsledky tímto jednoduchým modelem nemůžeme přesně podchytit. Bylo by zapotřebí napjatost v tomto místě určit jinak - elasto-plastickým výpočtem. Mějme na paměti, že i vysoké hodnoty napětí mohou být nakonec přípustné - záleží na vzrůstu mezi kluzu při rázu





Obrázek 87: Maximální napětí.



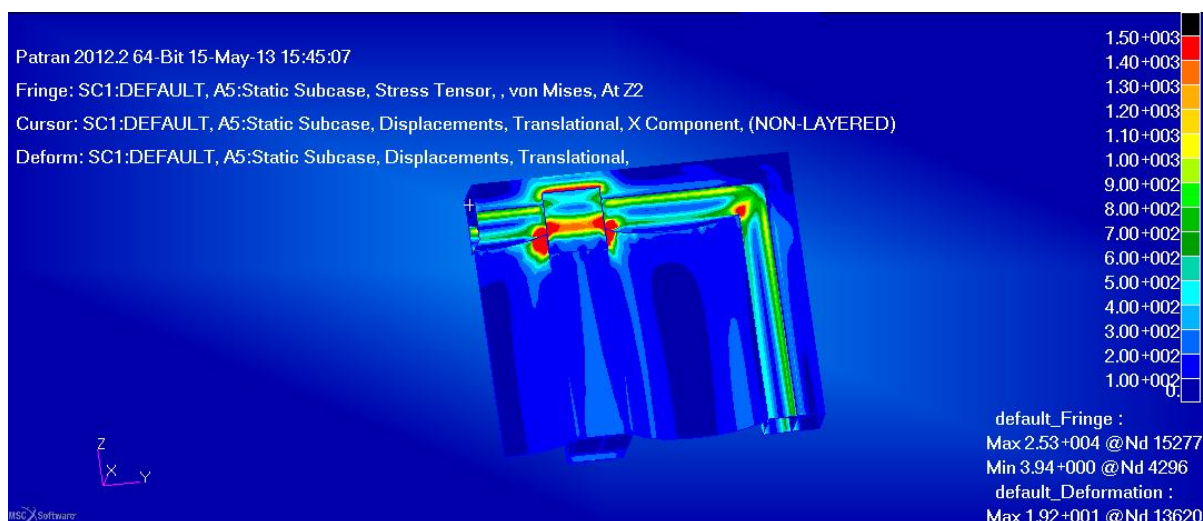
Obrázek 88: Maximální napětí, příčka.

(podkapitola 1.1).

Tyto místní špičky napětí dále nejsou uvažovány.

Musíme prozkoumat napjatost ve zbylých částech. Toho můžeme dosáhnout tak, že si rozsah ohraničíme na 1500MPa z hora. Pak získáme obrázek 89.

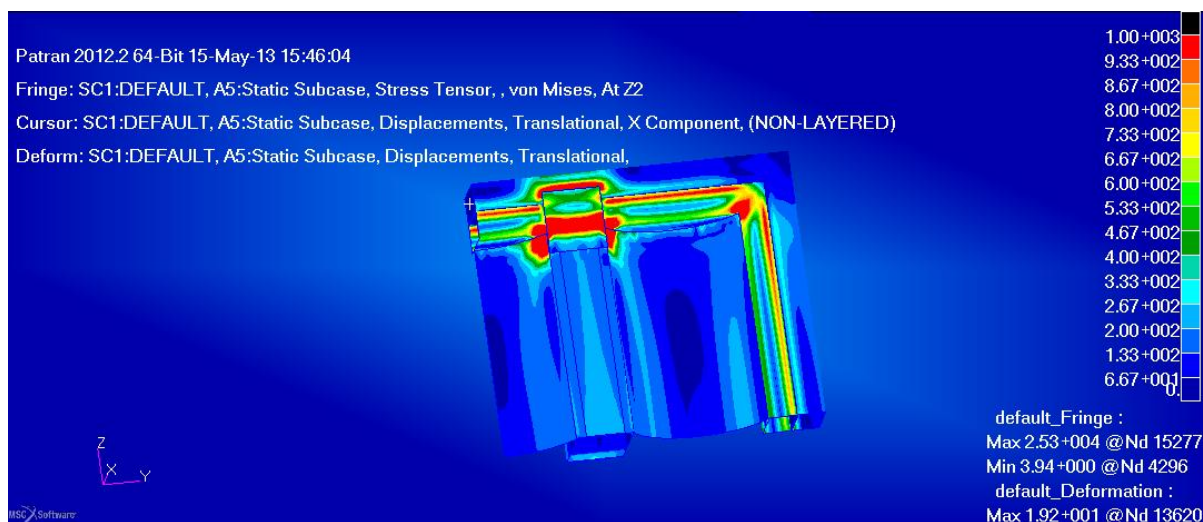
Takto vysoké napětí je samozřejmě kolem špiček z předešlého výsledku. Dále se vyskytuje u spojovacího plechu, kde se ostrá hrana zaboří do rámu a vzniká tak singularita. Nakonec se vyskytuje v místě spojení vodorovné a svislé části rámu, také



Obrázek 89: Napětí při upraveném rozsahu na maximum 1500MPa.

z pochopitelného důvodu - při kroucení se do sebe v tomto místě části zapřou a model opět ukazuje velmi vysoké napětí. Tyto špičky také nebudeme dále uvažovat.

Snížíme si horní mez na 1000MPa a dostaneme obrázek 90.



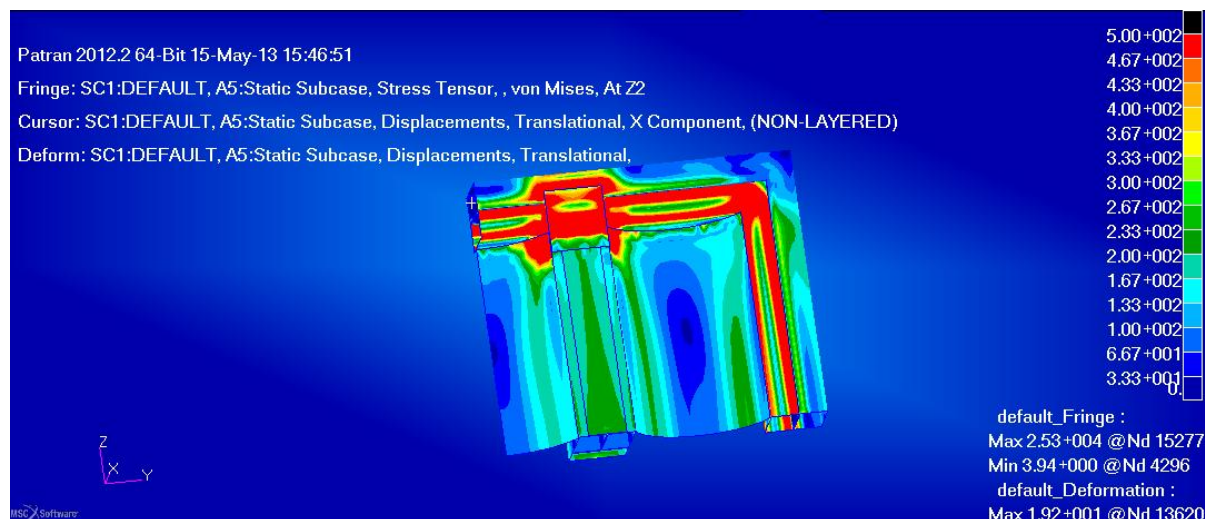
Obrázek 90: Napětí při upraveném rozsahu na maximum 1000MPa.

Oblasti z předchozího případu se rozšířily a k tomu vzniklo vysoké napětí v oblasti spoje mezi svařenými profily rámu v místě hran.

V místě hran se vysoké napětí dalo očekávat, a to už jen z důvodu tvaru rovnice (148). Zde je poloměr zaoblení hrany ve jmenovateli, to znamená, čím menší poloměr

zaoblení, tím vyšší napětí; pokud máme ostrou hranu, poloměr zaoblení se pak rovná nule a napětí by v tomto místě vyšlo analyticky nekonečně velké.

Horní mez si nastavíme na 500MPa a už dostaneme směřodonné výsledky, obrázek 91.



Obrázek 91: Napětí při upraveném rozsahu na maximum 500MPa.

Vysoké napětí je v oblastech uvedených výše (a samozřejmě v oblastech blízkých, ovlivněných). Rám nemá smysl hodnotit z důvodu ostrých hran místo zaoblení, zhodnocen byl navíc už v analytickém výpočtu, kde jsme došli k závěru, že jeho napjatost je nepodstatná. Podívejme se tedy na napjatost příčky a membrán.

## Příčka

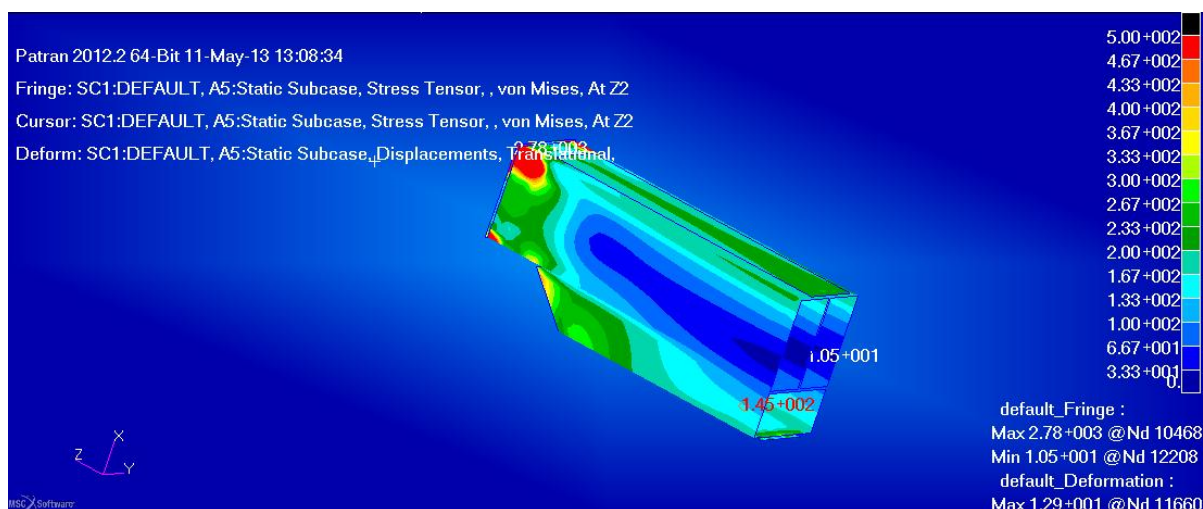
Ostatní komponenty si zneviditelníme a necháme zobrazenou pouze příčku, obrázek 92.

Vidíme oblast ovlivněnou špičkami napětí.

Dále, s napětím zhruba 350 MPa napojení dolního profilu; tato vysoká napjatost je nejspíše způsobena kontaktem s ostrým přechodem.

Poslední z vysokých hodnot, 250 - 300 MPa, se kromě oblastí ovlivněných výše zmíněnými, nachází na:





Obrázek 92: Napětí příčky.

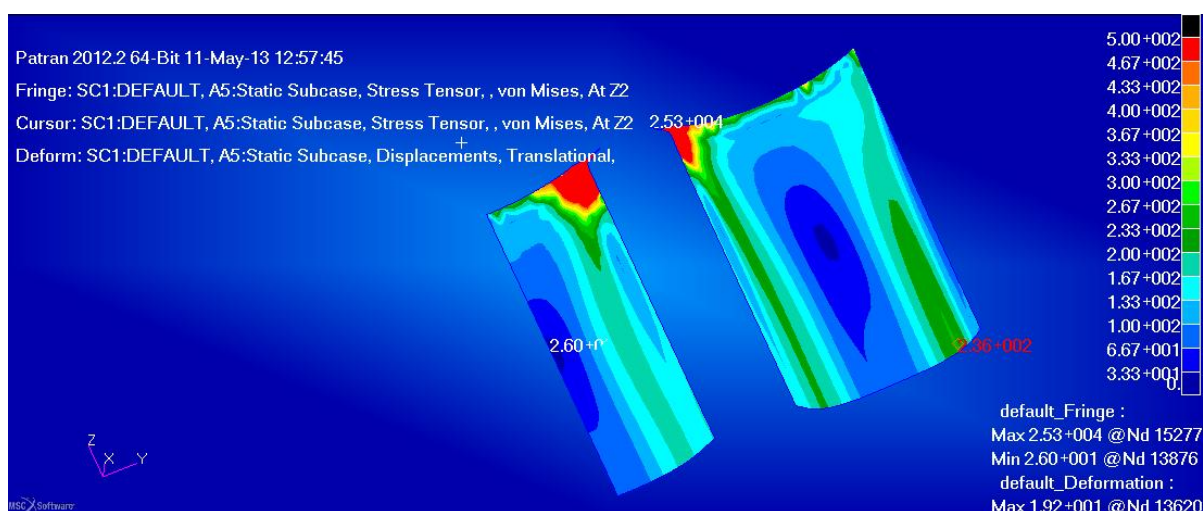
- horním plechu také z důvodu kontaktu s ostrými hranami v jeho místě,
- ostré hraně příčky,
- spodním navařeném plechu, takto lokálně nejpravděpodobněji kvůli okrajovým podmínkám.

Po vypuštění těchto hodnot vzniklých chováním modelu, které neukazuje skutečnost, si zobrazíme hodnotu v uzlu, 145MPa.

## Membrána

Zobrazíme si pouze membránu (membrány), obrázek 93.

Zde máme pouze oblast ovlivněnou špičkami, vyobrazíme si směrodatné hlavní napětí, 236 MPa.



Obrázek 93: Napětí membrány.

## 6 Porovnání výsledků z analytických a numerických výpočtů

Analytický výpočet pracuje s řadou zjednodušení, takže dostáváme méně přesné výsledky vzhledem k realitě. Při numerickém výpočtu dochází k menším zjednodušením geometrie, model se ale pořád nechová stoprocentně jako skutečné těleso.

Nejprve musíme mít na paměti, že výsledná napětí u analytického výpočtu je třeba zvětšit 2x (kapitola 1), abychom je mohli porovnávat s numerickými. Výsledky jsou v tabulce 1.

	analytický	převod na rázové zatížení	numerický
napětí membrány	111MPa	222MPa	236MPa
napětí příčky	58MPa	116MPa	145 MPa
průhyb příčky	0,89mm	1,78mm	3,22mm
napětí rámu	3MPa	6MPa	-

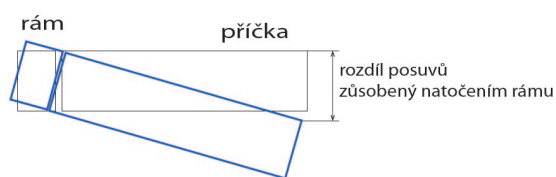
Tabulka 1: Porovnání výsledků.

Výsledná hodnota příčky (analytický výpočet) je určena v místě maxima ohybového momentu pro verzi s kloubem s hodnotou z verze pro vetknutí.

Rozdíl mezi analytickým a numerickým výpočtem pro napjatost membrány je malá - 6%, ačkoliv jsme v analytickém výpočtu uvažovali bezmomentovou charakteristiku a ve skutečnosti bude platit momentová.

U příčky je shoda horší, obzvláště v průhybu. Napětí se liší o 25%, průhyb ale o 80%. Důvodů to může mít několik:

- U analytického výpočtu jsme museli nahradit vazbu s rámem; rozhodovali jsme se mezi vetknutím a kloubem, přičemž skutečnost není ani jedno, ani druhé. U numerického výpočtu jsme příčku navázali na rám.
- Pro určení průhybu z numerického výpočtu jsme vypočítali rozdíl posuvů konců nosníku. Rozdíl posuvů je ale zvýšen kvůli natočení rámu, který přes vazbu natočí i příčku, obrázek 94.



Obrázek 94: Grafické znázornění chyby - kóta určuje posuv vzniklý natočením rámu, který se v numerickém výsledku přičetl ke skutečnému průhybu nosníku.

- Průhyb z analytického výpočtu dále musel vyjít menší, protože jsme počítali s momentem setrvačnosti průřezu v místě, kde má průhyb nastat; tento průřez ovšem není přes celou délku (směrem ke kraji se zeslabuje), takže skutečná tuhost nosníku bude nižší a průhyb tím pádem kvůli zeslabení vyšší.

Rám nemělo cenu numericky počítat, analytický výpočet nám ukázal zanedbatelné napětí.

## 7 Závěr

Pro zadanou úlohu jsme provedli analytický i numerický výpočet. Využili jsme přitom dvojí symetrie.

Bylo uvedeno chování materiálu a zatížení při rázu (výbuchu).

Analytický výpočet byl proveden dle základních teorií pružnosti a pevnosti. Základní komponenty jsme převedli na membránu, nosník a lomený nosník.

Membrána byla zatížena pouze vnitřním tlakem a napětí vyšlo 111MPa.

Příčka (nosník) byla zatížena vazbou od membrány a tlakem, obojí bylo převedeno na spojitě zatížení. Rám fungoval jako podpora nosníku; tato podpora se dala převést na vetknutí nebo kloub, přičemž skutečnost bude někde mezi tím. Výpočet byl tedy proveden pro vetknutí i kloub. Maximální ohybový moment byl v případě nosníku s kloubem v místě symetrie (uprostřed nosníku), maximální napětí kvůli zeslabení průřezu ve vzdálenosti 350mm od uchycení (za zjednodušení zanedbávající postupnou změnu průřezu). V případě nosníku s vetknutím byl maximální ohybový moment i napětí v místě vetknutí. Dopočítali jsme i hodnotu napětí v místě symetrie pro vetknutí. Jako výslednou hodnotu jsme určili napětí v místě maximálního ohybového momentu pro verzi s kloubem, ale s hodnotou pro vetknutí, dostali jsme výsledek 58MPa.

Průhyb nosníku jsme vypočítali pro případ nosníku s kloubem za použití Castiglianovy věty a získali jsme výsledek 0,89mm.

Pro rám zatížený od tlaku, vazbou s příčkou a membránou jsme museli určit dvě deformační podmínky - a to rovnost průhybů a úhlů natočení v bodě lomení. Nejvyšší napětí nakonec vyšlo 3MPa, což je pro materiál ocel zanedbatelné.

Numerický výpočet jsme provedli pomocí MSC Softwaru Nastran. Model pro výpočet jsme díky tenkostěnným prvkům mohli vytvořit ze skořepin. Po zadání okrajových podmínek a zatížení bylo nutno nadefinovat kontakty mezi komponenty. Nejprve jsme nadefinovali chování kontaktních těles (deformovatelná/nedeformovatelná) a poté jejich vztah s okolím (kontakt Glue nebo Touch).

Po načtení výsledků jsme „odfiltrovali“ špičky napětí a získali jsme podklady pro vyhodnocení napjatosti.

Pro napětí membrány jsme vyčetli hodnotu 236MPa.

Pro napětí nosníku 145MPa.

Pro průhyb nosníku za použití rozdílu posuvů 3,22mm.

Výsledky z analytických a numerických výpočtů jsou porovnány v kapitole 6. Všechny výsledky měly vyšší hodnoty z výpočtu numerického.

Pokud jako konečný výsledek určíme hodnoty z numerických výpočtů a porovnáme je s vlastnostmi materiálů:

- materiál membrány ocel 11 523, minimální hodnota meze kluzu 333MPa,
- nosníku (a rámu) ocel 11 373, minimální hodnota meze kluzu 187MPa,

přičemž by pro STATICKOU mez kluzu platila bezpečnost:

- membrána:  $\frac{333}{236} = 1,4$ ,
- nosník:  $\frac{187}{145} = 1,3$ ,

můžeme pro tento zjednodušený výpočet konstatovat, že konstrukce je navržena správně. Skutečné bezpečnosti budou vyšší a to v závislosti na zvýšení meze kluzu (podkapitola 1.1).

Výpočet je ale zjednodušený, bylo by třeba překontrolovat špičky napětí, to je ale již záležitostí plasticity.

## 8 Reference

- [1] FARLÍK, Alois; ONDRÁČEK, Emanuel. *Pružnost a pevnost - II. díl*. 1. vydání, Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1968. Číslo publikace 411-33683.
- [2] HERNANDEZ, C.; MARANON, A.; ASHCROFT, I. A.; CASAS-RODRIGUEZ,

- J. P. *A computational determination of the Cowper–Symonds parameters from a single Taylor test* [online]. 2012 [cit. 2013-05-13]. Dostupné z: <http://www.elsevier.com/locate/apm>.
- [3] NĚMEC, J.; DVORÁK, J.; HÖSCHL, C. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. 1. vydání, Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-03-00193-5.
- [4] FUSEK, Martin; HALAMA, Radim. *MKP a MHP* [online]. Ostrava, 2011 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda\\_konecných\\_prvku\\_a\\_hranicních\\_prvku.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecných_prvku_a_hranicních_prvku.pdf). VŠB-TUO.
- [5] HALAMA, Radim; ADÁMKOVÁ, Ludmila; FOJTÍK, František; FRYDRÝŠEK, Karel; ŠOFER, Michal; ROJÍČEK, Jaroslav; FUSEK, Martin. *Pružnost a pevnost* [online]. Ostrava, 2011 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost\\_a\\_pevnost.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_a_pevnost.pdf). VŠB-TUO.
- [6] LENERT, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. 2. vydání, Skriptum FS VŠB-TU Ostrava, 174 s., 2009. ISBN 978-80-248-1959-4.
- [7] FUXA, Jan; ADÁMKOVÁ, Ludmila. *Sbírka příkladů z pružnosti a pevnosti II*. 1. vydání, Skriptum FS VŠB-TU Ostrava, 140 s., 2008. ISBN 978-80-248-1933-4.
- [8] LEINVEBER, Jan; Vávra, Pavel. *Strojnické tabulky*. 2. vydání, Úvaly: Albra - pedagogické nakladatelství, 2005. ISBN 80-7361-011-6.